КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Теория игр

УДК 519.8 (075.8)
ББК 22.18 я73
П88

П88 Пузач В.Н.
Теория игр: конспект лекций по дисциплине / В.Н. Пузач; Костанайский филиал ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет». – Костанай: ТОО «New Line Media», 2015. – 66 с.

ISBN 978-601-7463-83-0

Конспект лекций по дисциплине «Теория игр» включает основное содержание курса и предназначен для студентов направлений подготовки «Экономика» и «Менеджмент». В содержании курса рассматриваются основные понятия теории игр, классы игр и их решения.

ISBN 978-601-7463-83-0

УДК 519.8 (075.8)
ББК 22.18 я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Что общего у шахмат, карточных игр, войн, переговоров, рыночной конкуренции, аукционов? Все эти ситуации можно описать с помощью теории игр - раздела прикладной математики, ставшей неотъемлемой частью экономической теории. Всюду, где только имеет место взаимодействие самостоятельных рациональных (или частично рациональных) субъектов, возникает игра. Главный вопрос теории игр заключается в предсказании поведения участников игры: какие ходы сделают шахматисты, чем завершатся войны и переговоры, какие цены сформируются на рынке и т.д. Оказывается, теория игр позволяет сделать достаточно сильные предсказания. Механизмы конкуренции, функционирования рынка, возникновения или краха монополий, способы принятия ими решений в условиях конкурентной борьбы - все это является предметом анализа теории игр. Уже в момент ее зарождения многие предсказали революцию в экономических науках благодаря использованию нового подхода. Революции, возможно, и не произошло, но тенденции развития экономики показали плодотворность методов теории игр в прикладной сфере. Так, в 1994 г. Джон Харшаньи и Рейнхард Зельтен получили Нобелевскую премию по экономике за работы в области теории игр (направления их исследований – это, например, переговоры с односторонними транзакционными затратами, равновесие рынка с продавцом и несколькими потенциальными покупателями и проч.).

Данный курс способствует развитию экономического анализа на основе математических методов, в основе которых точные количественные прогнозы.

ТЕМА 1. Введение в теорию игр

Цель: раскрыть специфику курса «Теория игр», рассмотреть основные понятия теории игр.

Ключевые слова: игра, основные понятия теории игр, классификация игр.

Вопросы:

1. Историческая справка.
2. Основные понятия теории игр.
3. Классификация игр.

1. Историческая справка

Первую попытку создать математическую теорию игр предпринял в 1921 г. Э. Борель. Как самостоятельная область науки впервые теория игр была систематически изложена в монографии Джона фон Неймана и О. Моргенштерна “Теория игр и экономическое поведение” в 1944 г. С тех пор многие разделы экономической теории (например, теория несовершенной конкуренции, теория экономического стимулирования и др.) развивались в тесном контакте с теорией игр. Теория игр с успехом применяется и в социальных науках (например, анализ процедур голосования, поиск равновесных концепций, определяющих кооперативные и некооперативные поведения лиц). Как правило, избиратели отводят кандидатов, представляющих крайние точки зрения, но при избрании одного из двух кандидатов, предлагающих различные компромиссные решения, возникает борьба. Даже идея Руссо об эволюции от «естественной свободы» к «гражданской свободе» формально соответствует с позиций теории игр точке зрения на кооперацию.

Теория игр имеет не очень длинную историю. Решающий поворот в ее развитии произошел в 1928 г. благодаря американцу Джону фон Нейману. Именно тогда он представил математическое обоснование общей стратегии для игры двух участников в терминах минимизации и максимизации. Одним из первых систематизированных изложений идей и методов в этой области была вышедшая в 1944 г. работа фон Неймана и О. Моргенштерна "Теория игр и экономическое поведение", которая распространила теорию игр на произвольное число участников и применила эту теорию к экономическому поведению. Предложенная в ней стратегия "минимакс", или минимизация максимальных потерь, определяется как рациональный курс в условиях неопределенности.

Теория игр и решений получила сильный импульс в годы Второй мировой войны, когда был введен термин "исследование операций". В типичной задаче этой тематики рассматривалась "дуэль" между самолетом и подводной лодкой. Первому требовалось найти оптимальную схему патрульного поиска в определенном районе; другой было необходимо изыскать наилучший способ уйти от наблюдения. Математики группы исследования операций по противолодочной защите, используя материалы фон Неймана, относящиеся к 1928 г., решили эту задачу.

Обычно теория игр определяется как теория математических моделей выбора оптимальных решений в условиях неопределенности. При этом тип неопределенности, изучаемый в теории игр, характеризуется тем, что рассматриваются ситуации, исход в которых определяется действием нескольких сторон, каждая из которых преследует собственные цели. Несовпадение целей действующих сторон, а также определенные ограничения на обмен информацией между ними приводят к тому, что эти взаимодействия носят конфликтный характер, поэтому в прикладном аспекте теория игр может рассматриваться как наука о рациональном поведении в условиях конфликта.

Очевидно, что взаимодействия между производителями и потребителями, из которых фактически складывается экономическая реальность, имеют именно такой характер, как указано выше, поэтому теория игр является наиболее адекватной теорией для изучения экономического поведения. Следует иметь в виду, что теория игр изучает не фактическое поведение участников, а их гипотетическое поведение, направленное на получение наилучшего в некотором смысле (оптимального) результата.

2. Основные понятия теории игр

Теория игр - раздел прикладной математики, предметом которого является поиск равновесия при помощи математических моделей в условиях конфликта интересов участников игры и неопределенности внешних условий.

Игра - это идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (игроков), интересы которых различны, что и порождает конфликтную ситуацию.

Конфликтная ситуация - ситуация в практической деятельности людей, когда два или несколько участников, имея различные цели и средства их достижения, пытаются достичь результата в условиях, когда никто из них полностью не влияет на ход событий. Участник конфликта принимает решения не на основе объективных обстоятельств, а на основе своих субъективных представлений о них, т.е. имеет место неполное представление об обстановке к моменту принятия решения. Участник конфликта располагает только набором вариантов обстоятельств, в которых следует принимать решения. При этом ему неизвестны ни вероятностные характеристики факторов, влияющих на обстоятельства, ни их вероятностное распределение на множестве вариантов; таким образом, он действует в условиях неопределенности. Примерами конфликтной ситуации являются ситуации, складывающиеся во взаимоотношениях покупателя и продавца; в условиях конкуренции различных фирм; в ходе боевых действий и др. Примерами игр являются и обычные игры: шахматы, шашки, карточные, салонные и др. (отсюда и название “теория игр” и ее терминология).

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Игровая модель - формальная модель принятия решений в условиях неопределенности, когда у принимающего решения субъекта имеется некоторый противник, уточняющий неизвестные варианты таким образом, чтобы поставить субъекта в наихудшее положение.

Понятие **оптимальности в теории игр** интерпретируется как объективная разумность, выгодность, целесообразность, справедливость, осуществимость, устойчивость. Выбор принципа оптимальности производится в соответствии с конкретной постановкой задачи, формализуемой игровой моделью; принцип оптимальности должен быть реализуем.

Предметом формального моделирования теории игр являются разумные действия лиц и коллективов, объединенные по какому-либо признаку, имеющие различные интересы и преследующие различные цели в условиях конфликта и неопределенности.

Сумма, которую получает каждый игрок в результате игры, называется **выигрышем**; в случае, если выигрыш отрицательный, он интерпретируется как **проигрыш**.

Набор правил, однозначно определяющих действия игрока во всех возможных случаях развития игры называется **стратегией.**

Принятие игроком в процессе игры того или иного решения и его реализация называется **ходом**; если ход выбирается случайным образом, то он называется случайным, в противном случае - личным.

Формализованное правило, согласно которому можно определить выигрыш каждого игрока в конкретной ситуации, т.е. в зависимости от стратегий, выбранных игроками, называется **платежной функцией игры.**

3.Классификация игр

Игры классифицируют по следующим критериям:

1. По количеству игроков:
   - ✓ игры двух игроков;
   - ✓ игры более двух игроков.
2. По количеству стратегий:
   - ✓ конечные игры;
   - ✓ бесконечные игры.
3. По характеру взаимодействия игроков:
   - ✓ коалиционные (кооперативные) игры;
   - ✓ бескоалиционные игры.
4. По характеру выигрышей:
   - ✓ игры с нулевой суммой;
   - ✓ игры с ненулевой суммой.
5. По общему виду функции выигрышей:
   - ✓ матричные игры;
   - ✓ биматричные игры;
   - ✓ непрерывные игры;
   - ✓ выпуклые игры;
   - ✓ сепарабельные игры;
   - ✓ игры типа дуэлей и др.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется игрой?
2. Какие виды игр вы знаете?
3. Дайте классификацию игр.
4. Кто является основоположником теории игр?

Список литературы

1. Оуэн, Г. Теория игр: учебное пособие / Г. Оуэн. – СПб.: ЛКИ, 2008. – 229 с.
2. Колесник, Г.В. Теория игр: учебное пособие / Г.В. Колесник. – Изд-е 4-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 152 с.
3. Шелехова, Л.В. Теория игр в экономике: учебное пособие / Л.В. Шелехова. - М. ; Берлин: Директ-Медиа, 2015. - 119 с.

ТЕМА 2. Матричные игры

Цель: изучить матричные игры и их модели.

Ключевые слова: матричная игра, решение матричной игры, чистая и смешанная стратегии, седловая точка.

Вопросы:

1. Определение и модель матричной игры.
2. Решение матричных игр в чистых стратегиях.
3. Смешанные стратегии в матричной игре.

1.Решение матричных игр в чистых стратегиях

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой.

Матричная игра может рассматриваться как следующая абстрактная модель: первый игрок имеет *m* стратегий *i* = 1,2,...,m, второй имеет *n* стратегий j = 1,2,...,n. Каждой паре стратегий (*i*,*j*) поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою *i*-ю стратегию, а 2 – свою *j*-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: игрок 1 выбирает свою *i*-ю стратегию ($i=\overline{1,m}$), 2 – свою j-ю стратегию ($j=\overline{1,n}$), после чего игрок 1 получает выигрыш a_{ij} за счёт игрока 2 (если $a_{ij}< 0$, то это значит, что игрок 1 платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i=\overline{1,m}$ $j=\overline{1,n}$ часто называется чистой стратегией.

Если рассмотреть матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору игроком 1 *i*-й строки, а игроком 2 *j*-го столбца и получения игроком 1 (за счёт игрока 2) выигрыша a_{ij}.

2. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является оптимальной, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, игрок 1 исследует матрицу выигрышей A следующим образом: для каждого значения $i, j=\overline{1,m}$ определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий игрока 2:

$$\min_j a_{ij}, i=\overline{1,m},$$

т.е. определяется минимальный выигрыш для игрока 1 при условии, что он примет свою i-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i=i_o$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е. находится

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha}, i = \overline{1, m}$$

Число $\underline{\alpha}$ называется ***нижней чистой ценой игры*** и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Игрок 2 при оптимальном своём поведении должен стремиться по возможности за счёт своих стратегий максимально уменьшить выигрыш игрока 1. Поэтому для игрока 2 отыскивается

$$\max_i a_{ij}, j = \overline{1, n},$$

т.е. определяется max выигрыш игрока 1, при условии, что игрок 2 применит свою j-ю чистую стратегию, затем игрок 2 отыскивает такую свою $j = j_1$ стратегию, при которой игрок 1 получит min выигрыш, т.е. находит

$$\min_j \max a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{\alpha}, j = \overline{1, n}$$

Число $\overline{\alpha}$ называется чистой ***верхней ценой игры*** и показывает, какой максимальный выигрыш за счёт своих стратегий может себе гарантировать игрок 1.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии, игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а игрок 2 за счёт применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш игрока 1 больше, чем $\overline{\alpha}$.

Если в игре с матрицей А $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, то говорят, что эта игра имеет ***седловую точку*** в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$v = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}.$$

Седловая точка – это пара чистых стратегий (i_o, j_o) соответственно игроков 1 и 2, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$. В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Математически это можно записать и иначе:

$$a_{ij_o} \le a_{i_o j_o} \le a_{i_o j}$$

где i, j – любые чистые стратегии соответственно игроков 1 и 2; (i_o, j_o) – стратегии, образующие седловую точку.

Таким образом, седловой элемент $a_{i_o j_o}$ является минимальным в i_o-й строке и максимальным в j_o-м столбце в матрице А. Отыскание седловой точки матрицы А происходит следующим образом: в матрице А последовательно в каждой строке находят минимальный элемент и проверяют, является ли этот элемент максимальным в своём столбце. Если да, то он и есть седловой элемент, а пара стратегий, ему соответствующая, образует седловую точку. **Определение.** Пара чистых стратегий *(i_o,j_o)* игроков 1 и 2, образующая седловую точку и седловой элемент $a_{i_o j_o}$ называется ***решением игры***. При этом i_o и j_o называются ***оптимальными чистыми стратегиями*** соответственно игроков 1 и 2.

Пример 1.

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \min\limits_j a_{ij} \\
 & & \| \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\
\max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & \ \ 5 & \ \ 4 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} &
\end{array}
$$

Седловой точкой является пара (i_o=3; j_o=1), при которой $\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha} = 2$.

Заметим, что, хотя выигрыш в ситуации (3;3) также равен $2 = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, она не является седловой точкой, т.к. этот выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца.

Пример 2.

$$
\begin{array}{rccl}
 & & & \min\limits_j a_{ij} \\
H = & \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 10 \\ 20 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 20 \\
\max\limits_i a_{ij} & \begin{matrix} \downarrow & \ \ \downarrow \end{matrix} & & \\
 & \underbrace{\begin{matrix} 40 & 30 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 30} & &
\end{array}
$$

Из анализа матрицы выигрышей видно, что $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$, т.е. данная матрица не имеет седловой точки. Если игрок 1 выбирает свою чистую максиминную стратегию i=2, то игрок 2, выбрав свою минимаксную j=2, проиграет только 20. В этом случае игроку 1 выгодно выбрать стратегию i=1, т.е. отклониться от своей чистой максиминной стратегии и выиграть 30. Тогда игроку 2 будет выгодно выбрать стратегию j=1, т.е. отклониться от своей чистой минимаксной стратегии и проиграть 10. В свою очередь игрок 1 должен выбрать свою 2-ю стратегию, чтобы выиграть 40, а игрок 2 ответит выбором 2-й стратегии и т.д.

3. Смешанные стратегии в матричной игре

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой седловой точки заканчивается исследование игры. Если же в игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Таким образом, если игрок 1 имеет m чистых стратегий 1, 2,...,m, то его смешанная стратегия x – это набор чисел $x=(x_1,...,x_m)$ удовлетворяющих соотношениям

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots, m), \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Аналогично для игрока 2, который имеет n чистых стратегий, смешанная стратегия y – это набор чисел

$$y = (y_1, ..., y_n), \quad y_j \geq 0, \quad (j = 1,\ldots, n), \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Так как каждый раз применение игроком одной чистой стратегии исключает применение другой, то чистые стратегии являются несовместными событиями. Кроме того, они являются единственными возможными событиями.

Чистая стратегия есть частный случай смешанной стратегии. Действительно, если в смешанной стратегии какая-либо i-я чистая стратегия применяется с вероятностью 1, то все остальные чистые стратегии не применяются. И эта i-я чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока.

Средний выигрыш игрока 1 в матричной игре с матрицей А выражается в виде математического ожидания его выигрышей

$$E(A, X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Первый игрок имеет целью за счёт изменения своих смешанных стратегий x максимально увеличить свой средний выигрыш Е (А, x, y), а второй – за счёт своих смешанных стратегий стремится сделать Е (А, x, y) минимальным, т.е. для решения игры необходимо найти такие x и y, при которых достигается верхняя цена игры

$$\overline{\alpha} = \min_{y} \max_{x} \{E(A, X, Y)\}.$$

Аналогичной должна быть ситуация и для игрока 2, т.е. нижняя цена игры должна быть

$$\underline{\alpha} = \max_{x} \min_{y} \{E(A, X, Y)\}.$$

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: оптимальными смешанными стратегиями игроков 1 и 2 называются такие наборы x_o, y_o соответственно, которые удовлетворяют равенству

$$\min_{Y} \max_{X} \{E(A, X, Y)\} = \max_{X} \min_{Y} \{E(A, X, Y)\} = E(A, x_0, y_0)$$

Величина $E(A, x_0, y_0)$ называется при этом ***ценой игры*** и обозначается через υ.

Имеется и другое определение оптимальных смешанных стратегий: x_o, y_o называются оптимальными смешанными стратегиями соответственно игроков 1 и 2, если они образуют седловую точку:

$$E(A, x, y_0) \leq E(A, x_0, y_0) \leq E(A, x_0, y)$$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называются ***решением матричной игры.***

Основная теорема матричных игр имеет вид:

Теорема 1. Для матричной игры с любой матрицей А величины $\underline{\alpha} = \max\limits_{x} \min\limits_{y} \{E(A, X, Y)\}$ и $\overline{\alpha} = \min\limits_{y} \max\limits_{x} \{E(A, X, Y)\}$ существуют и равны между собой.

Вопросы для самоконтроля

1. По какому алгоритму происходит поиск седловой точки в матричной игре?
2. Всегда ли в матричной игре есть седловые точки?
3. Каким образом можно выбирать свои стратегии случайно?
4. Что такое чистая стратегия игрока?
5. Что такое смешанная стратегия игрока в матричной игре и как она задается?

ТЕМА 3. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Цель: изучить особенности решения матричных игр.

Ключевые слова: матричная игра, решение матричной игры, чистая и смешанная стратегии, седловая точка.

Вопросы:

1. Свойства решений матричных игр.
2. Применение свойств при решении матричных игр.
3. Решение матричных игр графическим методом.

1.Свойства решений матричных игр

Обозначим через G *(X,Y,A)* игру двух лиц с нулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает стратегию $x \in X$, игрок 2 – $y \in Y$, после чего игрок 1 получает выигрыш A=A(*x, y)* за счёт игрока 2.

Стратегия x_1 игрока 1 ***доминирует (строго доминирует)*** над стратегией x_2, если $A\ (x_1, y) \geq A\ (x_2, y)\quad (A\ (x_1, y) > A\ (x_2, y)),\ y \in Y.$

Стратегия y_1 игрока 2 ***доминирует (строго доминирует)*** над стратегией y_2, если $A\ (x, y_1) \leq A\ (x, y_2)\quad (A\ (x, y_1) < A\ (x, y_2)),\ x \in X.$

При этом стратегии x_2 и y_2 называются доминируемыми (строго доминируемыми).

Спектром смешанной стратегии игрока в конечной антагонистической игре называется множество всех его чистых стратегий, вероятность которых согласно этой стратегии положительна.

Свойство 1. Если чистая стратегия одного из игроков содержится в спектре некоторой его оптимальной стратегии, то выигрыш этого игрока в ситуации, образованной данной чистой стратегией и любой оптимальной стратегией другого игрока равен значению конечной антагонистической игры.

Свойство 2. Ни одна строго доминируемая чистая стратегия игрока не содержится в спектре его оптимальной стратегии.

Определение. Игра $G' = (X',Y',A')$ называется подыгрой игры *G (X,Y,A),* если $X' \subset X,\ Y' \subset Y,$ а матрица A′ является подматрицей матрицы A. Матрица A′ при этом строится следующим образом: в матрице A остаются строки и столбцы, соответствующие стратегиям X' и Y', а остальные “вычеркиваются”. Всё то что “останется” после этого в матрице A и будет матрицей A′.

Свойство 3. Пусть G=(X, Y, A) – конечная антагонистическая игра, G′ = (X\x′,Y,A) – подыгра игры G, а x' – чистая стратегия игрока 1 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{x}$, спектр которой не содержит x′. Тогда всякое решение (x_o, y_o, υ) игры G′ является решением игры G.

Свойство 4. Пусть *G=(X, Y, A)* – конечная антагонистическая игра, $G' = (X,Y \backslash y',A)$ – подыгра игры G, а y' – чистая стратегия игрока 2 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{y}$, спектр которой не содержит y'. Тогда всякое решение игры G′ является решением G.

Свойство 5. Если для чистой стратегии x' игрока 1 выполнены условия свойства 3, а для чистой стратегии y' игрока 2 выполнены условия свойства 4, то всякое решение игры $G' = (X \backslash x', Y \backslash y', A)$ является решением игры $G=(X,Y,A)$.

Свойство 6. Тройка (x_o, y_o, υ) является решением игры $G=(X,Y,A)$ тогда и только тогда, когда $(x_o, y_o, k\upsilon + a)$ является решением игры $G\ (X,Y,kA+a)$, где a – любое вещественное число, $k > 0$.

Свойство 7. Для того, чтобы $x_0 = (x_1^o, ..., x_i^o, ..., x_m^o)$ была оптимальной смешанной стратегией матричной игры с матрицей А и ценой игры υ, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^o \geq \upsilon \qquad j = \overline{1,n}$$

Аналогично для игрока 2: чтобы $y_0 = (y_1^0, ..., y_j^0, ..., y_n^0)$ была оптимальной смешанной стратегией игрока 2 необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^o \leq \upsilon, i = \overline{1,m}$$

Из последнего свойства вытекает: чтобы установить, является ли предполагаемые (x,y) и υ решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли они неравенствам. С другой стороны, найдя неотрицательные решения неравенств совместно с уравнениями

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

получим решение матричной игры.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений линейных неравенств и линейных уравнений. Однако это требует большого объёма вычислений, которое растёт с увеличением числа чистых стратегий игроков. (Например, для матрицы 3×3 имеем систему из 6 неравенств и 2 уравнений). Поэтому, в первую очередь, следует по возможности, используя свойства 2 и 3, уменьшить число чистых стратегий игроков. Затем следует во всех случаях проверить выполнение неравенства

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Если оно выполняется, то игроки имеют чистые оптимальные стратегии (игрок 1 – чистую максиминную, а игрок 2 – чистую минимаксную). В противном случае хотя бы у одного игрока оптимальные стратегии будут смешанные. Для матричных игр небольшого размера эти решения можно найти, применяя свойства 1 – 5.

Замечание. Отметим, что исключение доминируемых (не строго) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

2. Применение свойств при решении матричных игр

Пример. Пусть G = (X,Y,A), где X = {1, 2, 3, 4}; Y = {1, 2, 3, 4}, а функция выигрыша A задана следующим образом:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2C & C & 2C & 3C \\ 3C & 3C/2 & C & 2C \\ 2C & 2C & C & C \\ C & C & C & C/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

где C > 0.

Решение. Прежде всего заметим, что по свойству 6 достаточно решить игру G_1 = (X,Y,A), где $A_1 = \frac{1}{C}$ A. В матричной форме игра G_1 определяется матрицей выигрышей:

$$A^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Элементы четвёртой строки этой матрицы “≤” соответствующих элементов третьей строки и поэтому третья стратегия игрока 1 доминирует над четвёртой. Кроме того, элементы первого столбца матрицы A_1 “≥” соответствующих элементов второго столбца, следовательно, вторая стратегия игрока 2 доминирует над его первой стратегией.

Далее из свойства 5 следует, что всякое решение игры G_2 = (X\{4}, Y\{1}, A_1) является решением игры G_1. В матричной форме игру G_2 можно представить матрицей:

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Очевидно, что элементы второй строки “≥” полусуммы соответствующих элементов первой и третьей строк. Кроме того, элементы третьего столбца матрицы A_2 “≥“ соответствующих элементов второго столбца. Применяя свойство 5 получим, что всякое решение игры G_3 = (X\{4,2}, Y\{1,4}, A_2) является решением игры G_2, а следовательно и игры G_1. Игра G_3 определяется матрицей:

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матрица A_3 не имеет седловой точки, т.к. не выполнено равенство

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

а игра G_3 не имеет решения в чистых стратегиях, т.е. оптимальные стратегии игроков являются смешанными. В данном случае эти стратегии легко найти из анализа структуры матрицы A_3. Поскольку матрица A_3 симметрична, можно предположить, что игроки в оптимальной стратегии используют свои чистые стратегии с равными вероятностями.

Действительно, если игрок 1 выбирает с равными вероятностями стратегии 1 и 3, то при применении любой из двух чистых стратегий игроком 2 математическое ожидание выигрыша игрока 1 будет равным, либо

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{3}{2},$$

либо

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Аналогично, если игрок 2 использует свои чистые стратегии 2 и 3 с равными вероятностями, то математическое ожидание его проигрыша будет равно $\frac{3}{2}$. Следовательно, указанные стратегии являются оптимальными в игре G_3, а величины $\frac{3}{2}$ – значением игры G_3. Из предыдущего следует, что эти стратегии оптимальны и в G_1.

Таким образом, стратегия X = ($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 0) является оптимальной стратегией игрока 1, стратегия Y = (0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0) – оптимальной стратегией игрока 2 в игре G_1, а значение игры G_1 равно $\frac{3}{2}$. В силу свойства 4 решением игры G будет тройка (X,Y, $\frac{3C}{2}$).

3.Решение матричных игр графическим методом

Как уже отмечалось в теореме об активных стратегиях, любая конечная игра m×n имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит L, где $L=\min(m,n)$. Следовательно, у игры 2×n или m×2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков $(\min\ (2,n)=\min\ (m,2)=2)$.

Практически решение игры 2×n осуществляется следующим образом:
1) строится графическое изображение игры для игрока A;
2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы (максимин), которая равна цене игры v;
3) определяется пара стратегий игрока B, пересекающихся в точке оптимума. Эти стратегии и являются активными стратегиями игрока B.

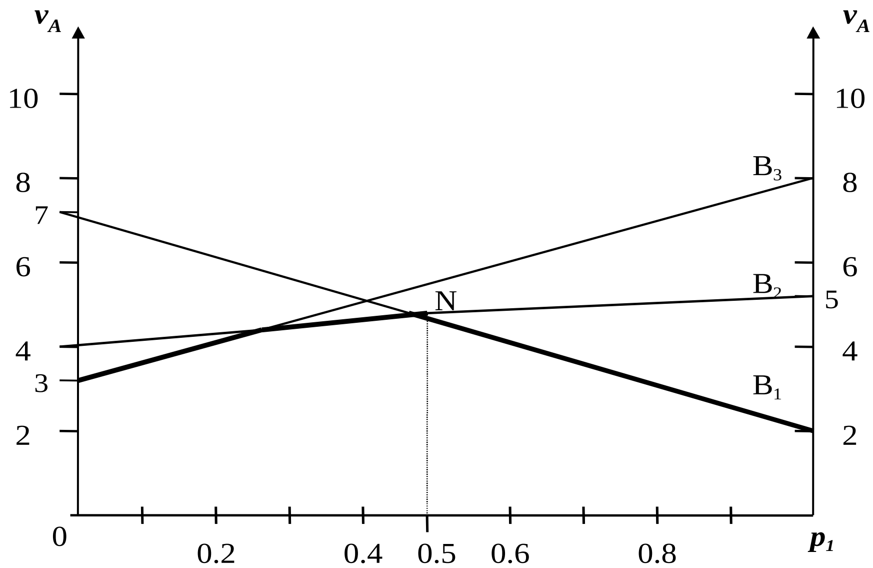
Решение игры m×2 осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока B и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша (так как находится оптимальная смешанная стратегия игрока B), и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Пример. Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	4	3

Таблица 1.

Платежная матрица не имеет седловой точки, поэтому оптимальное решение должно быть в смешанных стратегиях. Строим графическое изображение игры для игрока А:



Точка N (максимин) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются линии, соответствующие активным стратегиям B_1 и B_2 игрока В. Таким образом, исключая стратегию B_3, получаем матричную игру 2x2 с платежной матрицей вида:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	4

Таблица 2.

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение:

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = \frac{1}{2}; \qquad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2};$$

$$q_1 = \frac{4-5}{2+4-7-5} = \frac{1}{6}; \qquad q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{6};$$

$$v = \frac{2\cdot 4 - 7\cdot 5}{2+4-7-5} = \frac{27}{6}.$$

Ответ: $S_A = \left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\|$; $S_B = \left\| \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0 \right\|$; $v = \frac{27}{6}$.

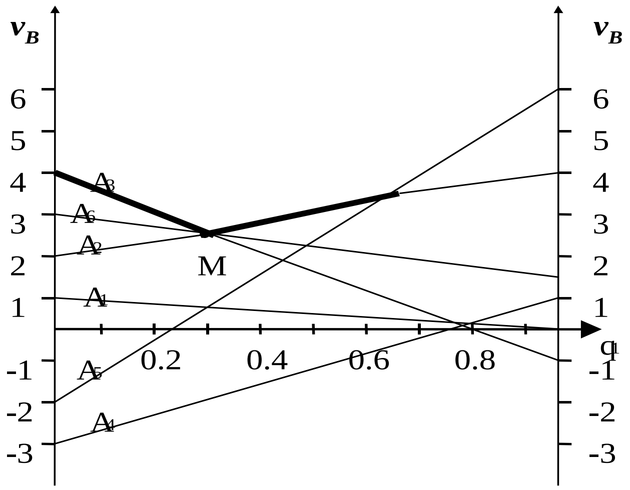
Пример. Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	0	1
A_2	4	2
A_3	-1	4
A_4	1	-3
A_5	6	-2
A_6	1,5	3

Таблица 3.

Платежная матрица не имеет седловой точки. Для сведения данной игры к игре 2x2 строим ее графическое изображение для игрока B.

Точка M (минимакс) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям A_2, A_6 и A_3 игрока A. Таким образом, исключая стратегии A_1, A_4 и A_5 и выбирая из трех активных стратегий две (например, A_2 и A_3 или A_2 и A_6), приходим к матричной игре 2x2. Выбор стратегий A_3 и A_6 исключен, т.к. в этом случае точка M перестанет быть точкой минимакса.



Пусть выбираются стратегии A_2 и A_3. Тогда игра 2x2 приобретает вид:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_2	4	2
A_3	-1	4

Таблица 4.

Оптимальные смешанные стратегии данной игры, а, следовательно, и исходной игры определяются следующими вероятностями:

$$p_1 = \frac{4+1}{4+4-2+1} = \frac{5}{7}; \qquad p_2 = \frac{2}{7};$$

$$q_1 = \frac{4-2}{4+4-2+1} = \frac{2}{7}; \qquad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4\cdot 4 - 1\cdot 2}{4+4-2+1} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left\| 0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0, 0 \right\|$; $S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|$; $v = \frac{18}{7}$.

Вопросы для самоконтроля

6. Что собой содержательно представляют компоненты смешанной стратегии?
7. Как определяется функция выигрыша игрока в смешанных стратегиях?
8. Как задается матричная игра со смешанными стратегиями? Какими свойствами обладают стратегии?
9. Сформулируйте основную теорему теории матричных игр.

ТЕМА 4. Матричные игры как задачи линейного программирования

Цель: изучить решение матричных игр $m \times n$ при помощи симплекс-метода.
Ключевые слова: матричная игра, симплекс-метод.
Вопросы:

1. Формулировка матричной игры в терминах линейного программирования.
2. Решение матричной игры симплекс-методом.

1.Формулировка матричной игры в терминах линейного программирования.

Пусть имеется матричная игра mxn без седловой точки с матрицей выигрышей $\|a_{ij}\|$. Допустим, что все выигрыши a_{ij} положительны (этого всегда можно добиться, прибавляя ко всем элементам матрицы достаточно большое число C; от этого, как уже отмечалось, цена игры увеличится на C, а оптимальные решения S_A и S_B не изменятся).

Если все a_{ij} **положительны**, то и цена игры v при оптимальной стратегии тоже положительна, т.к. $\alpha \le v \le \beta$.

В соответствии с основной теоремой матричных игр, если платежная матрица не имеет седловой точки, то имеется пара оптимальных смешанных стратегий $S_A=\|p_1, p_2, ..., p_m\|$ и $S_B=\|q_1, q_2, ..., q_n\|$, применение которой обеспечивает игрокам получение цены игры v .

Найдем вначале S_A. Для этого предположим, что игрок B отказался от своей оптимальной смешанной стратегии S_B и применяет только чистые стратегии. В каждом из этих случаев выигрыш игрока A будет не меньше, чем v :

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \ge v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \ge v, \\ .... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \ge v. \end{cases}$$

Разделив левую и правую часть каждого из неравенств на положительную величину v и, введя обозначения, получим:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}; \quad x_2 = \frac{p_2}{v}; \quad ..., x_m = \frac{p_m}{v},$$

запишем неравенства в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge 1 \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge 1 \end{cases},$$

где x_1, x_2, ... x_m - неотрицательные переменные.

В силу того, что $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$, переменные x_1, x_2, ... x_m удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v},$$

учитывая, что игрок А стремится максимизировать v, получаем следующую задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, ... x_m такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям - неравенствам и обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$\min L(x)=x_1+x_2+\ldots+x_m.$$

Из решения задачи линейного программирования находим цену игры v и оптимальную стратегию S_a по формулам:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i},$$

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = x_i \cdot v, \; i = \overline{1,m}.$$

Аналогично находим оптимальную стратегию S_B игрока В.

Предположим, что игрок А отказался от своей оптимальной стратегии S_A и применяет только чистые стратегии. Тогда проигрыш игрока В в каждом из этих случаев будет не больше, чем v :

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v \end{cases}.$$

Разделив левую и правую части каждого из неравенств на положительную величину v и введя обозначения

$$y_1 = \frac{q_1}{v}; \quad y_2 = \frac{q_2}{v}; \quad \ldots, y_n = \frac{q_n}{v},$$

запишем неравенство в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases},$$

где y_1, y_2, ..., y_n - неотрицательные переменные.

В силу того, что $q_1+q_2+\ldots+q_n=1$, переменные y_1, y_2, ..., y_n удовлетворяют условию

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}.$$

Учитывая, что игрок В стремится минимизировать положительную цену ***v*** (свой проигрыш), получаем задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных y_1, y_2, ..., y_n такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям и обращали в максимум линейную функцию этих переменных:

$$\max L(y)=y_1+y_2+\ldots+y_m.$$

Оптимальная стратегия $S_B=||q_1, q_2, ..., q_n||$ игрока В определяется из решения двойственной задачи линейного программирования по формулам:

$$q_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = y_j \cdot v, \quad j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, оптимальные стратегии $S_A=||p_1,p_2,...,p_m||$ и $S_B=||q_1,q_2,...,q_n||$ матричной игры m×n с платежной матрицей $||a_{ij}||$ могут быть найдены путем решения пары двойственных задач линейного программирования:

Прямая (исходная) задача	Двойственная задача
$\min L(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i$,	$\max L(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j$,
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1$, $j = \overline{1,n}$;	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1$, $i = \overline{1,m}$;
$x_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$.	$y_j \ge 0$, $i = \overline{1,n}$.

При этом

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = \frac{1}{\min L(x)} = \frac{1}{\max L(y)},$$

$$p_i = x_i \cdot v; \quad i = \overline{1,m}; \quad q_j = y_j \cdot v; \quad j = \overline{1,n}.$$

2.Решение матричной игры симплекс-методом

Найти решение и цену матричной игры, платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	3	1	1
A_3	1	3	1

Таблица 5.

Решение

1. Так как α=1 не равно β=3, то игра не имеет седловой точки.

2. В данной игре нет дублирующих и доминируемых стратегий.

3. Решаем игру путем решения пары двойственных задач линейного программирования.

Математические модели пары двойственных задач линейного программирования будут выглядеть следующим образом:

Прямая (исходная) задача:

Найти неотрицательные переменные x_1, x_2, x_3, минимизирующие функцию $\min L(x) = x_1+x_2+x_3$ при ограничениях:

$x_1+3x_2+x_3 \geq 1$;

$2x_1+x_2+3x_3 \geq 1$;

$3x_1+x_2+x_3 \geq 1$;

$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,3}$.

Двойственная задача:

Найти неотрицательные переменные y_1, y_2, y_3, максимизирующие функцию $\max L(x) = y_1+y_2+y_3$ при ограничениях:

$y_1+2y_2+3y_3 \leq 1$;

$3y_1+y_2+y_3 \leq 1$;

$y_1+3y_2+y_3 \leq 1$;

$y_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}$.

Данные задачи решаются, например, симплекс-методом. Поскольку в двойственной задаче ограничения имеют вид “≤“, то эту задачу решать проще (не нужно вводить искусственные переменные). Оптимальное решение исходной задачи можно будет непосредственно получить из данных симплекс-таблицы для оптимального решения двойственной задачи.

Начальная симплекс-таблица двойственной задачи имеет вид:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	1	2	3	1	0	0	1
y_5	3	1	1	0	1	0	1
y_6	1	3	1	0	0	1	1
L	-1	-1	-1	0	0	0	0

ведущая строка

ведущий столбец

Таблица 6.

Последующие симплекс-таблицы приведены ниже:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	0	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y_6	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
L	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

ведущая строка

ведущий столбец

Таблица 7.

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	0	0	$\frac{9}{4}$	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$
y_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
y_2	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
L	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

ведущая строка

ведущий столбец

Таблица 8.

И, наконец, получаем симплекс-таблицу, которая соответствует оптимальному решению двойственной задачи:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_3	0	0	1	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$
y_1	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$
y_2	0	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
L	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

Таблица 9.

Оптимальное решение двойственной задачи линейного программирования следующее:

$$y_1=\frac{2}{9};\ y_2=\frac{2}{9};\ y_3=\frac{1}{9};\quad \max L\,(y)=\frac{5}{9}.$$

Находим оптимальную смешанную стратегию игрока В в соответствии с формулами:

$$v=\frac{1}{\sum_{j=1}^{3} y_j}=\frac{1}{\frac{2}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{9}{5};$$

$$q_1=y_1\cdot v=\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{5}=\frac{2}{5};\qquad q_2=y_2\cdot v=\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{5}=\frac{2}{5};\qquad q_3=y_3\cdot v=\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{5}=\frac{1}{5}.$$

Следовательно, $S_B=\left\|\frac{2}{5};\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right\|$.

Оптимальное решение исходной задачи находим, используя двойственные оценки из симплекс-таблицы для оптимального решения двойственной задачи: коэффициент при начальной базисной переменной в оптимальном уравнении прямой задачи равен разности между правой и левой частями ограничения двойственной задачи, ассоциированного с данной начальной переменной.

Получаем $x_1=\frac{2}{9}$; $x_2=\frac{2}{9}$; $x_3=\frac{1}{9}$; $\max L\,(x)=\frac{5}{9}$.

Отсюда определим вероятности применения своих активных стратегий игроком А:

$$p_1 = x_1 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5}; \quad p_2 = x_2 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5}; \quad p_3 = x_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $S_A = \left\| \frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right\|$.

Таким образом, решение игры $m \times n$ сводится к решению задачи линейного программирования. Нужно заметить, что и наоборот, - для любой задачи линейного программирования может быть построена эквивалентная ей задача теории матричных игр. Эта связь задач теории матричных игр с задачами линейного программирования оказывается полезной не только для теории игр, но и для линейного программирования. Дело в том, что существуют приближенные численные методы решения матричных игр, которые при большой размерности задачи могут оказаться проще, чем симплекс-метод.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу линейного программирования.
2. Как решать задачу симплекс-методом?

ТЕМА 5. Биматричные игры

Цель: изучить особенности решения биматричных игр.

Ключевые слова: биматричная игра, решение биматричной игры, чистая и смешанная стратегии в биматричной игре.

Вопросы:

1. Основные определения теории биматричных игр.
2. Смешанные стратегии в биматричных играх.
3. Ситуация равновесия в биматричных играх.

1. Основные определения теории биматричных игр

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения:

игрок A может выбрать любую из стратегий $A_1, \ldots, A_m$, игрок B любую из стратегий B1, …, B_n. При этом всякий раз их совместный выбор оценивается вполне определенно: если игрок A выбрал i-ю стратегию A_i, а игрок B – k-ю стратегию B_k, то в итоге выигрыш игрока A будет равен некоторому числу a_{ik}, а выигрыш игрока B некоторому другому числу b_{ik}.

Иными словами всякий раз каждый из игроков получает свой приз.

Последовательно перебирая все стратегии игрока A и все стратегии игрока B, мы сможем заполнить их выигрышами две таблицы (первая из них описывает выигрыши игрока A, а вторая – выигрыши игрока B).

	B_1	…	B_k	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ik}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}

	B_1	…	B_k	…	B_n
A_1	b_{11}	…	b_{1k}	…	b_{1n}
…	…	…	…	…	…
A_i	b_{i1}	…	b_{ik}	…	b_{in}
…	…	…	…	…	…
A_m	b_{m1}	…	b_{mk}	…	b_{mn}

Обычно эти таблицы записывают в виде матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ik} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Здесь A – платежная матрица игрока A, B – платежная матрица игрока B.

При выборе игроком A i-й стратегии, а игроком B – k-й стратегии их выигрыши находятся в матрицах выплат на пересечении i-х строк и k-х столбцов: в матрице A это элемент a_{ik}, а в матрице B – элемент b_{ik}.

Таким образом, в случае, когда интересы игроков различны (но не обязательно противоположны), получаются две платежные матрицы: одна – матрица выплат игроку A, другая – матрица выплат игроку B. Поэтому совершенно естественно звучит название, которое обычно присваивается подобной игре – биматричная.

Замечание. Рассматриваемые матричные игры можно рассматривать и как биматричные, где матрица выплат игроку В противоположна матрице выплат А: $b_{ik} = -a_{ik}$

В общем случае, ***биматричная игра*** – это игра с ненулевой суммой.

Класс биматричных игр значительно шире класса матричных (разнообразие новых моделируемых конфликтных ситуаций весьма заметно), а, значит, неизбежно увеличиваются и трудности, встающие на пути их успешного разрешения.

Пример. «Студент — Преподаватель».

Рассмотрим следующую ситуацию. Студент (игрок А) готовится к зачету, который принимает Преподаватель (игрок В). Можно считать, что у Студента две стратегии: подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (-). У Преподавателя также две стратегии: поставить зачет [+] и не поставить зачет [-].

В основу значений функций выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш Студента

	[+]	[–]
(+)	оценка заслужена	очень обидно
(–)	удалось обмануть	оценка заслужена

Выигрыш Преподавателя

	[+]	[–]
(+)	все нормально	был неправ
(–)	дал себя обмануть	опять придет

Количественно это можно выразить, например, так:

	[+]	[–]
(+)	2	–1
(–)	1	0

	[+]	[–]
(+)	1	–3
(–)	–2	–1

2. Смешанные стратегии в биматричных играх

В приведенных примерах описаны ситуации, в которых интересы игроков не совпадают. Встает вопрос о том, какие рекомендации необходимо дать игрокам для того, чтобы моделируемая конфликтная ситуация разрешилась. Иными словами, что мы будем понимать под решением биматричной игры?

Попробуем ответить на это вопрос так: вследствие того, что интересы игроков не совпадают, нам нужно построить такое (компромиссное) решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков. Не пытаясь сразу выражать эту мысль совсем точно, скажем: попробуем найти некую равновесную ситуацию, явное отклонение от которой одного из игроков уменьшало бы его выигрыш.

Подобный вопрос мы ставили и при рассмотрении матричных игр. Напомним, что возникающее при разработке минимаксного подхода понятие равновесной ситуации приводило нас к поиску седловой точки, которая, существует не всегда – конечно, если ограничиваться только чистыми стратегиями игроков A и B, т.е. стратегиями $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$.

Однако при расширении матричной игры путем перехода к смешанным стратегиям, т. е. к такому поведению игроков, при котором они чередуют (чистые) стратегии с определенными частотами:
игрок A – стратегии A1,..., A_m с частотами p_1,..., p_m, где:

$$p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0, \ldots, p_m \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

а игрок B – стратегии B_1,...., B_n, с частотами q1,..., q_n, где:

$$q_1 \ge 0, q_2 \ge 0, \ldots, q_n \ge 0,\ \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$$

Выяснилось, что в смешанных стратегиях равновесная ситуация всегда существует. Иными словами, любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима. Поэтому, рассматривая здесь биматричные игры, разумно попробовать сразу же перейти к смешанным стратегиям игроков (этим мы предполагаем, что каждая игра может быть многократно повторена в неизменных обстоятельствах).

В матричном случае смешивание стратегий приводило к расширению возможности выплат в том смысле, что расчет строился из вычисления средних выигрышей игроков A и B, которые определялись по элементам платежной матрицы A и вероятностям p_i и q_k:

$$H_A(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i q_k, \qquad H_B(P,Q) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i q_k$$

При смешанных стратегиях в биматричных играх также возникают средние выигрыши игроков A и B, определяемые по правилам, в которых уже нет никакой дискриминации игрока B:

$$H_A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i q_k, \qquad H_B = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} p_i q_k$$

3. Ситуация равновесия в биматричных играх

Мы предполагаем уделить основное внимание случаю, когда у каждого из игроков имеется ровно две стратегии, т.е. случаю n=m=2. Поэтому нам кажется уместным выписать приведенные выше формулы именно для такого случая.

В 2×2 биматричной игре платежные матрицы игроков имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

вероятности чистых стратегий:

$$p_1 = p, \quad p_2 = 1 - p, \quad q_1 = q, \quad q_2 = 1 - q,$$

а средние выигрыши вычисляются по формулам:

$$H_A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q),$$

$$H_B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q),$$

где

$$0 \le p \le 1, \quad 0 \le q \le 1.$$

Сформулируем основное определение. Будем считать, что пара чисел

$$\left(p^*, q^*\right) \qquad 0 \le p^* \le 1 \qquad 0 \le q^* \le 1.$$

определяет ***равновесную ситуацию***, если для любых p и q, подчиненных условиям $0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1,$ одновременно выполнены следующие неравенства:

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*),$$

$$H_B(p^*,q) \le H_B(p^*,q^*).$$

Выписанные неравенства (1) означают следующее: ситуация, определяемая смешанной стратегией (p*, q*), является равновесной, если отклонение от нее одного из игроков при условии, что другой сохраняет свой выбор, приводит к тому, что выигрыш отклонившегося игрока может только уменьшиться. Тем самым получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

Теорема 2. (Дж. Нэш). Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Итак, равновесная ситуация существует. Но как ее найти?

Если некоторая пара чисел (p*, q*) претендует на то, чтобы определять ситуацию равновесия, то для того, чтобы убедиться в обоснованности этих претензий, или, наоборот, доказать их необоснованность, необходимо проверить справедливость неравенств для любого p в пределах от 0 до 1 и для любого q в пределах от 0 до 1. В общем случае число таких проверок бесконечно. И, следовательно, действенный способ определения равновесной ситуации нужно искать где-то в ином месте.

Теорема 3. Выполнение неравенств

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*),$$

$$H_B(p^*,q) \le H_B(p^*,q^*).$$

равносильно выполнению неравенств

$$H_A(0,q^*) \le H_A(p^*,q^*), \qquad H_B(p^*,0) \le H_B(p^*,q^*),$$

$$H_A(1,q^*) \le H_A(p^*,q^*), \qquad H_B(p^*,1) \le H_B(p^*,q^*),$$

Иными словами для того, чтобы убедиться в обоснованности претензий пары (p*, q*) на то, чтобы определять равновесную ситуацию, нужно проверить справедливость неравенства

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*),$$

только для двух чистых стратегий игрока A (p = 0 и p = 1) и неравенства

$$H_B(p^*,q) \le H_B(p^*,q^*).$$

только для двух чистых стратегий игрока B (q = 0 и q= 1).

Четыре неравенства позволяют провести поиск точки равновесия вполне конструктивно.

Запишем средние выигрыши игроков А и В в более удобной форме. Имеем:

$$H_A(p,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22},$$

$$H_B(p,q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22},$$

Обратимся к первой из полученных формул. Полагая в ней сначала p = 1, а потом p = 0, получаем:

$$H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q,$$

$$H_A(0,q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22},$$

Рассмотрим разности:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p -$$
$$- (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} - a_{12},$$

$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p.$$

Полагая, что

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \ \alpha = a_{22} - a_{12},$$

получим для них следующие выражения:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \alpha(p-1) = (p-1)(Cq - \alpha),$$

$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha).$$

В случае, если пара (p, q) определяет точку равновесия, эти разности неотрицательны:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) \geq 0, \ H_A(p,q) - H_A(0,q) \geq 0.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq - \alpha) \geq 0 \\ p(Cq - \alpha) \geq 0 \end{cases}$$

Из формул для функции H_B (p, q) при q = 1 и q = 0 соответственно имеем:

$$H_B(p,1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p + (b_{12} - b_{22})p + b_{21},$$

$$H_B(p,0) = (b_{12} - b_{22})p + b_{22},$$

Разности

$$H_B(p,q) - H_B(p,1) \text{ и}$$

с учетом обозначений

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \ \beta = b_{22} - b_{21}.$$

приводятся к виду:

$$H_B(p,q) = H_B(p,1) = (q-1)(Dp - \beta),$$

$$H_B(p,q) = H_B(p,0) = q(Dq - \beta)$$

совершенно так же, как соответствующие разности для функции H_A.

Если пара (p, q) определяет точку равновесия, то эти разности неотрицательны

$$H_B(p,q) - H_B(p,1) \geq 0, \qquad H_B(p,q) - H_B(p,0) \geq 0.$$

Поэтому

$$\begin{cases}(q-1)(Dp-\beta)\ge 0,\\ \qquad q(Dp-\beta)\ge 0.\end{cases}$$

Вывод: для того, чтобы в биматричной игре

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},$$

пара (p, q) определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0\\ \qquad p(Cq-\alpha)\ge 0\end{cases},\quad 0\le p\le 1,$$

$$\begin{cases}(q-1)(Dp-\beta)\ge 0,\\ \qquad q(Dp-\beta)\ge 0\end{cases},\quad 0\le q\le 1,$$

где

$$C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22},\ \ \alpha=a_{22}-a_{12},$$
$$D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22},\ \ \beta=b_{22}-b_{21}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае возникает биматричная игра, чем она задается?
2. Как можно задать функции выигрыша игроков?
3. Как определяются смешанные стратегии игроков и функции выигрыша игроков?
4. Как определяется ситуация равновесия в биматричной игре?
5. В чем содержательный смысл ситуации равновесия?
6. В каком смысле седловая точка является частным случаем ситуации равновесия?

ТЕМА 6. Бесконечные антагонистические игры

Цель: изучить особенности решения бесконечных антагонистических игр.

Ключевые слова: бесконечная антагонистическая игра, решение бесконечной антагонистической игры, чистая и смешанная стратегии, седловая точка.

Вопросы:

1. Определение бесконечной антагонистической игры.
2. Игры с выпуклыми функциями выигрышей.
3. Примеры бесконечных антагонистических игр.

1. Определение бесконечной антагонистической игры

Естественным обобщением матричных игр являются бесконечные антагонистические игры, в которых хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий. Мы будем рассматривать игры двух игроков, делающих по одному ходу, и после этого происходит распределение выигрышей. При формализации реальной ситуации с бесконечным числом выборов можно каждую стратегию сопоставить определённому числу из единичного интервала, т.к. всегда можно простым преобразованием любой интервал перевести в единичный и наоборот.

Напоминание. Пусть E - некоторое множество вещественных чисел. Если существует число y, такое, что $x \le y$ при всех $x \in E$ (при этом y не обязательно принадлежит E), то множество E называется ***ограниченным сверху***, а число y называется ***верхней границей*** множества E. Аналогично определяется **ограниченность снизу** и **нижняя граница** множества E. Обозначаются верхняя и нижняя границы соответственно через sup E и inf E соответственно.

Пример. Пусть множество E состоит из всех чисел вида $\frac{1}{n}$, n=1,2, ... Тогда множество E ограничено, его верхняя грань равна 1, а нижняя 0, причём $0 \notin E$, а $1 \in E$.

Для дальнейшего изложения теории игр этого класса введём определения и обозначения: [0; 1] - единичный промежуток, из которого игрок может сделать выбор; x - число (стратегия), выбираемое игроком 1; y - число (стратегия), выбираемое игроком 2; $M_i(x, y)$ - выигрыш i-го игрока; G (X, Y, M_1, M_2) - игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает число x из множества X, игрок 2 выбирает число y из множества Y и после этого игроки 1 и 2 получают соответственно выигрыши $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$. Пусть далее G (X, Y, M) - игра двух игроков с нулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает число x, игрок 2 - число y, после чего игрок 1 получает выигрыш M (x, y) за счёт второго игрока.

Большое значение в теории бесконечных антагонистических игр имеет вид функции выигрышей (x, y). Так, в отличие от матричных игр, не для всякой функции M(x, y) существует решение. Будем считать, что выбор определённого числа игроком означает применение его чистой стратегии, соответствующей этому числу. По аналогии с матричными играми назовём чистой нижней ценой игры величину

$$V_1 = \max_x \inf_y M(x, y) \quad \text{или} \quad V_1 = \max_x \min_y M(x, y),$$

а чистой верхней ценой игры величину

$$V_2 = \min_y \sup_x M(x, y) \quad \text{или} \quad V_2 = \min_y \max_x M(x, y),$$

Для матричных игр величины V_1 и V_2 всегда существуют, а в бесконечных играх они могут не существовать.

Естественно считать, что, если для какой-либо бесконечной игры величины V_1 и V_2 существуют и равны между собой ($V_1=V_2=V$), то такая игра имеет решение в чистых стратегиях, т.е. оптимальной стратегией игрока 1 есть выбор числа $x_o \in X$ и игрока 2 - числа $y_o \in Y$, при которых $M(x_o, y_o)=V$, в этом случае V называется ценой игры, а (x_o, y_o) - седловой точкой в чистых стратегиях.

Пример 1. Игрок 1 выбирает число x из множества X=[0; 1], игрок 2 выбирает число y из множества Y=[0; 1]. После этого игрок 2 платит игроку 1 сумму $M(x,y)=2x^2-y^2$.

Поскольку игрок 2 хочет минимизировать выигрыш игрока 1, то он определяет $\min_{y\in Y}(2x^2-y^2) = 2x^2-1$, т.е. при этом y=1. Игрок 1 желает максимизировать свой выигрыш, и поэтому определяет $\max_{x\in X}(\min_{y\in Y} M(x, y)) = \max_{x\in X}(2x^2-1)=2-1=1$, который достигается при x = 1.

Итак, нижняя цена игры равна $V_1=1$.

Верхняя цена игры $V_2 = \min_{y\in Y}(\max_{x\in X}(2x^2-y^2)) = \min_{y\in Y}(2-y^2) = 2-1 = 1$, т.е. в этой игре $V_1=V_2=1$. Поэтому цена игры V=1, а седловая точка (1; 1).

Пример 2. Игрок 1 выбирает $x\in X=(0; 1)$, игрок 2 выбирает $y\in Y=(0; 1)$. После этого игрок 1 получает сумму $M(x, y)=x+y$ за счёт игрока 2. Поскольку X и Y – открытые интервалы, то на них V_1 и V_2 не существуют. Если бы X и Y были замкнутые интервалы, то, очевидно, было бы следующее: $V_1=V_2=1$ при x=1, $y_o=0$.

С другой стороны, ясно, что, выбирая x, достаточно близкое к 1, игрок 1 будет уверен, что он получит выигрыш не меньше, чем число, близкое к цене игры V=1; выбирая y, близкое к нулю, игрок 2 не допустит, чтобы выигрыш игрока 1 значительно отличался от цены игры V=1.

Степень близости к цене игры может характеризоваться числом ε>0. Поэтому в описываемой игре можно говорить об оптимальности чистых стратегий $x_o=1$, $y_o=0$ соответственно игроков 1 и 2 с точностью до произвольного числа ε>0. В связи с этим введём следующие определения.

Точка $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, где $x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$ в антагонистической непрерывной игре G называется ***точкой ε-равновесия***, если для любых стратегий $x\in X$ игрока 1, $y\in Y$ игрока 2 имеет место неравенство

$$M(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \le M(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \le M(x_\varepsilon, y) + \varepsilon.$$

Точка ε-равновесия ($x_\varepsilon, y_\varepsilon$) называется также ***ε-седловой точкой*** функции M(x, y), а стратегии x_ε и y_ε называются ***ε-оптимальными стратегиями***. Эти стратегии являются оптимальными с точностью до ε в том смысле, что, если отклонение от оптимальной стратегии никакой пользы игроку принести не может, то его отклонение от ε-оптимальной стратегии может увеличить его выигрыш не более, чем на ε.

Можно доказать, что для того, чтобы функция M имела ε-седловые точки для любого ε>0 необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_x \inf_y M(x, y) = \inf_y \sup_x M(x, y).$$

Если игра G не имеет седловой точки (ε-седловой точки) в чистых стратегиях, то оптимальные стратегии можно искать среди смешанных стратегий. Однако, в качестве вероятностной меры здесь вводятся функции распределения вероятностей применения игроками чистых стратегий.

2. Смешанные стратегии в бесконечной антагонистической игре

Пусть F(x) - функция распределения вероятностей применения чистых стратегий игроком 1. Если число ξ – чистая стратегия игрока 1, то F(x) = P(ξ≤x), где P(ξ≤x) означает вероятность того, что случайно выбранная чистая стратегия ξ не будет превосходить числа x. Аналогично рассматривается функция распределения вероятностей применения чистых стратегий η игроком 2: Q(y) = P(η ≤ y).

Функции F(x) и Q(y) называются ***смешанными стратегиями*** соответственно игроков 1 и 2. Если F(x) и Q(y) дифференцируемы, то существуют их производные, обозначаемые соответственно через f(x) и q(y) (функции плотности распределения).

В общем случае дифференциал функции распределения dF(x) выражает вероятность того, что стратегия ξ находится в промежутке x≤ξ≤x+dx.

Аналогично для игрока 2: dQ(y) означает вероятность того, что его стратегия η находится в интервале y≤η≤y+dy. Тогда выигрыш игрока 1 составит M(x, y) dF(x), а выигрыш игрока 2 равен M(x, y) dQ(y).

Средний выигрыш игрока 1 при условии, что игрок 2 применяет свою чистую стратегию y получим, если проинтегрируем выигрыш по всем возможным значениям x, т.е.

$$E(F, y)\int_0^1 M(x, y)\,dF(x)$$

Напомним, что множество Y для y является замкнутым промежутком [0; 1].

Если игрок 1 применяет свою чистую стратегию x, а игрок 2 – y, то выигрыш игрока 1 составит M(x, y) dP(x) dQ(y).

Средний выигрыш игрока 1 при условии, что оба игрока применяют свои смешанные стратегии F(x) и Q(y), будет равен

$$E(F,Q)=\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dF(x)\,dQ(y).$$

По аналогии с матричными играми определяются оптимальные смешанные стратегии игроков и цена игры: в антагонистической непрерывной игре G(X, Y, M) пара смешанных стратегий F*(x) и Q*(y) соответственно для игроков 1 и 2 образует седловую точку в смешанных стратегиях, если для любых смешанных стратегий F(x) и Q(y) справедливы соотношения $E(F,Q^*) \le E(F^*,Q^*) \le E(F^*,Q)$.

Из левой части последнего неравенства следует, что если игрок 1 отступает от своей стратегии F*(x), то его средний выигрыш не может увеличиться, но может уменьшиться за счёт лучших действий игрока 2, поэтому F*(x) называется оптимальной смешанной стратегией игрока 1.

Из правой части последнего неравенства следует, что если игрок 2 отступит от своей смешанной стратегии Q*(y), то средний выигрыш игрока 1 может увеличиться, а не уменьшиться за счёт более разумных действий игрока 1, поэтому Q*(y) называется оптимальной смешанной стратегией игрока 2. Средний выигрыш E(F*,Q*), получаемый игроком 1 при применении игроками оптимальных смешанных стратегий, называется **ценой игры**.

По аналогии с матричными играми рассматривается **нижняя цена** непрерывной игры в смешанных стратегиях

$$V_1 = \max_F \min_Q E(F, Q)$$

и **верхняя цена** игры

$$V_2 = \min_F \max_Q E(F, Q).$$

Если существуют такие смешанные стратегии F*(x) и Q*(y) соответственно для игроков 1 и 2, при которых нижняя и верхняя цены непрерывной игры совпадают, то F*(x) и Q*(y) естественно назвать оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков, а $V_1=V_2=V$ - ценой игры.

Можно доказать, что существование седловой точки в смешанных стратегиях игры G(X, Y, M) равносильно существованию верхней V2 и нижней V1 цен игры в смешанных стратегиях и их равенству $V_1=V_2=V$.

Таким образом, решить игру G(X, Y, M) - означает найти седловую точку или такие смешанные стратегии, при которых нижняя и верхняя цены игры совпадают.

Теорема 4. (существования). Всякая антагонистическая бесконечная игра двух игроков G с непрерывной функцией выигрышей M (x, y) на единичном квадрате имеет решение (игроки имеют оптимальные смешанные стратегии).

Теорема 5. Пусть задана бесконечная антагонистическая игра с непрерывной функцией выигрышей M(x, y) на единичном квадрате и ценой игры V. Тогда, если Q(y) - оптимальная стратегия игрока 2 и для некоторого x_o

$$\int_0^1 M(x_o, y)\, dQ(y) < V,$$

то x_o не может входить в точки спектра оптимальной стратегии игрока 1; если F(x) - оптимальная стратегия игрока 1 и для некоторого y_o

$$\int_0^1 M(x, y_o)\, dF(x) > V\,,$$

то y_o не может быть точкой спектра оптимальной стратегии игрока 2.

Из теоремы 2 следует, что если один из игроков применяет оптимальную стратегию, а другой - чистую, при том, что средний выигрыш игрока 1 отличается от цены игры, то эта чистая стратегия не может войти в его оптимальную стратегию (или она входит в неё с вероятностью нуль).

Теорема 6. Пусть в бесконечной антагонистической игре функция выигрышей M (x, y) непрерывная для $x\in[0; 1]$, $y\in[0; 1]$ и $M(x, y) = –M(y, x)$, тогда цена игры равна нулю и любая оптимальная стратегия одного игрока будет также оптимальной стратегией другого игрока.

Сформулированные свойства оптимальных смешанных стратегий и цены игры помогают находить или проверять решения, но они ещё не дают в общем виде приемлемых методов решения игры. Более того, не существует общих методов для точного нахождения решения бесконечных антагонистических игр, и, в том числе, непрерывных игр на единичном квадрате. Поэтому рассматриваются частные виды антагонистических бесконечных игр.

3. Примеры бесконечных антагонистических игр

Игра «Борьба за рынки»

Пусть одна из фирм (игрок 1) пытается вытеснить другую фирму (игрок 2), имеющую два рынка сбыта, с одного из этих рынков. Общая сумма средств, выделяемых игроком 1 на эту цель, равна единице ($X\in[0,1]$). Стратегии игрока 1 состоят в распределении этих средств между двумя рынками. Если на первый рынок направляется сумма x, то на второй - $(1-x)$. Пусть игрок 2 для удержания рынков также располагает единичной суммой средств, и его стратегия будет состоять в выделении суммы y на первый рынок и (1-y) - на второй.

Считается, что игрок 1, добившись превосходства средств на одном из рынков, вытесняет своего противника с этого рынка и получает выигрыш, равный избытку своих средств, который берется с коэффициентом, характеризующим важность рынка (пусть этот коэффициент равен k_1 для первого рынка и k_2 для второго).

Рассматриваемая игра является игрой на единичном квадрате. В этой игре пара чисел (x, y), где $x, y \in[0,1]$ являются точками единичного квадрата.

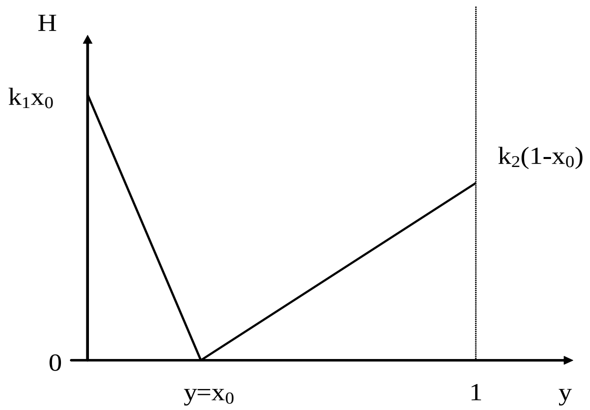
Функция выигрыша в рассматриваемом примере

$$H(x,y) = \begin{cases} h_1(x-y), & если\ x \ge y; \\ h_2(x-y), & если\ x \le y, \end{cases}$$

где $h_1>0;\ h_2>0.$

Решение.

График зависимости $H(x_0,\ y)$ от y для некоторого $x=x_0$ представлен на рисунке:



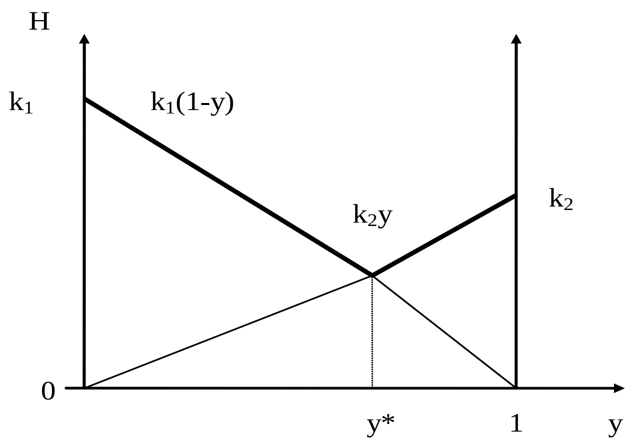
Очевидно, что при любых x_0 функция H (x_0, y**)** является выпуклой функцией от y. Имеем:

$$\max_x H(x,y) = \max_x \left\{ \max_{x\ge y} h_1(x-y), \max_{x\le y} h_2(y-x) \right\} = \max_x \{h_1(1-y), h_2 y\}.$$

Поэтому цена игры:

$$v = \min_y \max_x H(x,y) = \min_y \max_x \{h_1(1-y), h_2(y)\}.$$

График функции $\max\limits_x \{h_1(1-y), h_2(y)\}$ выделен на рисунке жирной ломаной.



Первый член под знаком максимума с ростом y убывает, а второй - возрастает. Поэтому при малых значениях y максимум достигается на отрезке $k_1(1\text{-}y)$, а при больших - на отрезке прямой k_2y. Следовательно, минимальное значение этот максимум принимает при таком y*, для которого $k_1(1-y^*) = k_2 y^*$, т.е. при

$$y^* = \frac{k_1}{k_1 + k_2}.$$

Таким образом, найденное y* является единственной оптимальной чистой стратегией игрока 2. Она состоит в распределении имеющихся средств между рынками пропорционально важности рынков.

Значение цены игры:

$$v = \min_y \max_x H(x,y) = \max_x H(x,y^*) = \max\left\{ h_1\left(1 - \frac{h_2}{h_1 + h_2}\right), \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2} \right\} = \frac{k_2 k_1}{k_1 k_2}.$$

Далее надо найти оптимальную стратегию игрока 1. Случаи x≥y* и x≤y* будем рассматривать порознь.

Теорема 6 утверждает, что если H(x,y) - выпукла и 0≤y*≤1, то среди оптимальных стратегий игрока 1 найдется такая, которая является смесью двух активных стратегий x' и x''. Для этих стратегий

$$\frac{\partial H(x',y^*)}{\partial y} \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial H(x'',y^*)}{\partial y} \leq 0 .$$

При этом стратегии x' и x'' употребляются с вероятностями *p* и *(1-p)*, где *p* находится из уравнения

$$p\frac{\partial H(x',y^*)}{\partial y} + (1-p)\frac{\partial H(x'',y^*)}{\partial y} = 0.$$

Для случая x≥y* уравнение принимает вид:

$$k_1\left(x - \frac{k_1}{k_1+k_2}\right) = \frac{k_2 k_1}{k_1+k_2} .$$

откуда x'=1.

Для случая x≤y* уравнение имеет уже другой вид:

$$k_2\left(\frac{k_1}{k_1+k_2} - x\right) = \frac{k_2 k_1}{k_1+k_2} .$$

откуда x''=0.

Таким образом, активными стратегиями игрока 1 оказываются: x'=0; и x'' =1. Поэтому игрок 1 должен применять смешанную стратегию, являющуюся смесью этих двух активных стратегий. Для нахождения вероятности p, используем уравнение.

Частные производные

$$\left.\frac{\partial H(0,y)}{\partial y}\right|_{y=y^*} = \left.\frac{\partial}{\partial y}k_2 y\right|_{y=y^*} = k_2 > 0 .$$

$$\left.\frac{\partial H(1,y)}{\partial y}\right|_{y=y^*} = \left.\frac{\partial}{\partial y}k_1(1-y)\right|_{y=y^*} = -k_1 \leq 0 .$$

Тогда уравнение для данной игры приобретает вид $pk_2 + (1-p)(-k_1) = 0$, откуда

$$p = \frac{k_1}{k_1+k_2} .$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока 1 состоит в концентрации всех его средств на одном из рынков, причем вероятность выбора рынка обратно пропорциональна его важности. Этот результат объясняется просто: чем важнее рынок, тем больше средств вложит противник в его сохранение и тем меньше свободных средств останется на нем после вытеснения противника, и тем менее значимой будет победа над ним.

Игра с выбором момента времени (игра типа дуэли)

Пусть каждый из двух игроков намерен выполнить некоторое действие (выбросить на рынок партию товара, внести на совещание предложение, произвести выстрел и т.д.). При этом обстоятельства часто складываются так, что, во-первых, целесообразно выполнить это действие как можно позже, а во-вторых, желательно своим действием упредить сходное действие противника. Такой конфликт в условиях противоположных интересов его участников естественно моделировать бесконечной антагонистической игрой на единичном квадрате, в которой функция выигрыша H в общем случае имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l}\psi(x,y), \text{при } x<y;\\ \varsigma(x), \text{при } x=y;\\ \varphi(x,y), \text{при } x>y,\end{array}\right\}$$

где каждая из функций ψ и φ

а) непрерывна по обеим переменным;

б) монотонно возрастает по x при любых значениях y;

в) монотонно убывает по y при любом значении x;

г) удовлетворяет условию $\varphi(x,x)\le\varsigma(x)\le\psi(x,x)$.

Игра с функцией выигрыша H(x,y), удовлетворяющая перечисленным условиям называется ***игрой с выбором момента времени***, или ***игрой типа дуэли***.

Мы ограничимся рассмотрением одного примера данной игры, теория которой, хотя и разработана, но достаточно сложна.

Пусть игроки 1 и 2 выбирают соответственно числа x и y из интервала (0, 1). Эти числа будем понимать как моменты времени выполнения ими требуемых действий. Пусть t - время появления некоторого объекта, который достается игроку, который первый после t совершил требуемое действие. Игрок, обладающий объектом, получает выигрыш, равный 1, а его противник эту единицу теряет. Если ни один из игроков не получит объект, то выигрыш каждого из игроков принимается равным нулю.

Предполагается, что время появления объекта является случайной величиной, распределенной на отрезке [0, 1] по равномерному закону. Эту игру называют также борьбой за встречу случайно появляющегося объекта.

Запишем математическое выражение функции выигрыша. Рассмотрим ситуацию (x, y), в которой x<y. В этом случае игрок 1 выигрывает единицу, если t≤x; проигрывает единицу, если x<t≤y; и не получает ничего, если y≤t.

Вероятность событий равны соответственно x, $(y$-$x)$ и $(1$-$y)$. Таким образом, при $x<y$ имеем

$$H(x,y)=1\cdot x+(-1)(y-x)=2x-y.$$

Аналогичным способом находим, что при x>y

$$H(x,y)=1\cdot(x-y)+(-1)y=x-2y.$$

Естественно, что при $x=y$, H(x, y)=0.

Схематическое описание H(x, y) приведено на рисунке.

Решение.

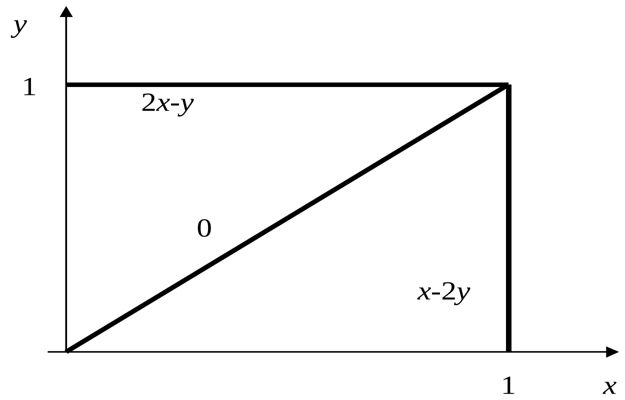
Заметим, что игра является симметричной. Действительно, при x<y

$$H(x,y) = 2x - y = -H(y,x) = -(y-2x).$$

Аналогично, при $x>y$

$$H(x,y) = y - 2x = -H(y,x) = (2y - x).$$

Наконец, при $x=y$ $H(x,y) = 0 = -H(y,x)$.



Для антагонистических симметричных игр существует теорема, утверждающая для этих игр цену игры $v = 0$, а оптимальные стратегии игроков 1 и 2 совпадают.

Поэтому для решения данной задачи достаточно найти оптимальную стратегию игрока 1.

Пусть оптимальная стратегия игроков имеет плотность распределения *f*:

$S_A(x) = f(x)$;

$S_B(y) = f(y)$.

Если игрок 2 применяет эту стратегию, то

$$H(x,f) = \int_0^1 H(x,y) \quad f(y)dy.$$

С учетом формул перепишем последний интеграл:

$$H(x,f) = \int_0^x (x-2y) f(y)dy + \int_x^1 (2x-y) \quad f(y)dy.$$

Так как $H(x,f) = v = 0$ постоянна, то все производные по x функции H(x,f) также должны обращаться в нуль.

Дифференцируя тождество по x, имеем

$$\frac{\partial H(x,f)}{\partial x} = (x-2x)f(x) + \int_0^x f(y)dy - (2x-x)f(x) + 2\int_x^1 f(y)dy =$$

$$= -2xf(x) + \int_0^1 f(y)dy + \int_x^1 f(y)dy = -2xf(x) + 1 + \int_x^1 f(y)dy.$$

Вторая частная производная имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H(x,f)}{\partial x^2} = -2f(x) - 2xf'(x) - f(x) = 0, \text{ т.е. } \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем

$$\ln f(x) = -\frac{3}{2} \ln x + c',$$

откуда

$$f(x) = c \cdot x^{-3/2}.$$

Полученная плотность распределения *f(x)* положительна и дифференцируема. Однако интеграл $\int_0^1 x^{-3/2} dx$ расходится. Следовательно, плотность *f* не может быть дифференцируемой и больше нуля на всем сегменте [0, 1].

Можно доказать, что плотность распределения может обращаться в нуль лишь между нулем и некоторым α>0. Таким образом, имеем:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \alpha; \\ cx^{-3/2} & \text{при } x \geq \alpha. \end{cases}$$

Для определения неизвестных параметров α и *c* воспользуемся следующими соображениями. Во-первых, *f(x)* должна удовлетворять условию нормировки:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_\alpha^1 f(x)dx = 1.$$

Во-вторых, $H(f,1) = v = 0$.

Из уравнений можно определить значения α и с. С этой целью перепишем эти уравнения в явном виде.

$$c\int_\alpha^1 x^{-3/2} dx = 1, \text{ т.е.}$$

$$c \cdot (-2)x^{-1/2}\Big|_\alpha^1 = 2c\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1\right) = 1.$$

Далее, на основании симметричности игры

$$H(f,1) = -H(1,f) = -c\int_\alpha^1 (1-2y)y^{-3/2} dy = 0.$$

Поскольку с≠0, это нам дает

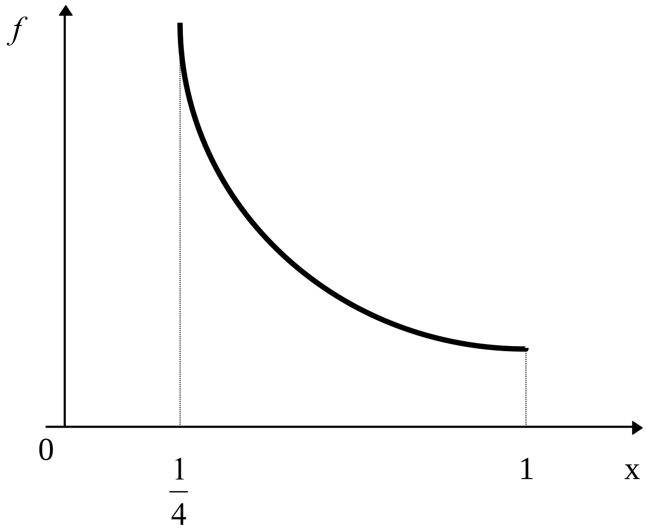
$$\int_\alpha^1 (y^{-3/2} - 2y^{-3/2})dy = (-2y^{-3/2} - 4y^{-1/2}\Big|_\alpha^1 = 0.$$

Откуда получаем $2\alpha - 3\sqrt{\alpha} + 1 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: 1 и $\frac{1}{4}$. Корень α=1 противоречит равенству, а подстановка $\alpha = \frac{1}{4}$ в это равенство дает $c = \frac{1}{2}$.

Таким образом, искомая оптимальная стратегия игрока 1 определяется плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<\dfrac{1}{4};\\ \dfrac{1}{2}x^{-3/2} & \text{при } x\ge\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

График *f(x)* изображен на рисунке:



Остается проверить, что найденные стратегии игроков действительно являются оптимальными. Для этого достаточно убедиться в том, что для любого x $H(x,f)\le v=0$.

При $x\le\dfrac{1}{4}$, $H(x,f)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}(2x-y)y^{-3/2}dy=\dfrac{1}{2}\left((-2)2xy^{-1/2}-2y^{1/2}\right)\Big/_{\frac{1}{4}}^{1}=\dfrac{2x}{2}-\dfrac{1}{2}<0$,

поскольку в рассматриваемом случае $x<\dfrac{1}{2}$. При $\dfrac{1}{4}\le x\le 1$, формула дает

$$\frac{\partial H(x,f)}{\partial x}=-2x\frac{1}{2}x^{-3/2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{1}y^{-3/2}dy+1=x^{-1/2}+\frac{1}{2}(-2)y^{-1/2}\Big|_{x}^{1}+1=-x^{-1/2}+x^{-1/2}-1+1=0.$$

Тем самым оптимальность стратегии с плотностью *f* установлена.

ТЕМА 7. Выпуклые игры

Цель: изучить особенности решения выпуклых игр.

Ключевые слова: выпуклая игра, чистая и смешанная стратегии, седловая точка.

Вопросы:

1. Определение выпуклой игры.
2. Решение выпуклой игры.
3. Решение выпуклой игры в существенных стратегиях.

1. Определение выпуклой игры.

Игры с выпуклыми непрерывными функциями выигрышей, называемые часто ***ядром***, называются ***выпуклыми играми***.

Напомним, что ***выпуклой функцией*** **f действительной переменной x на интервале (a, b)** называется такая функция, для которой выполняется неравенство

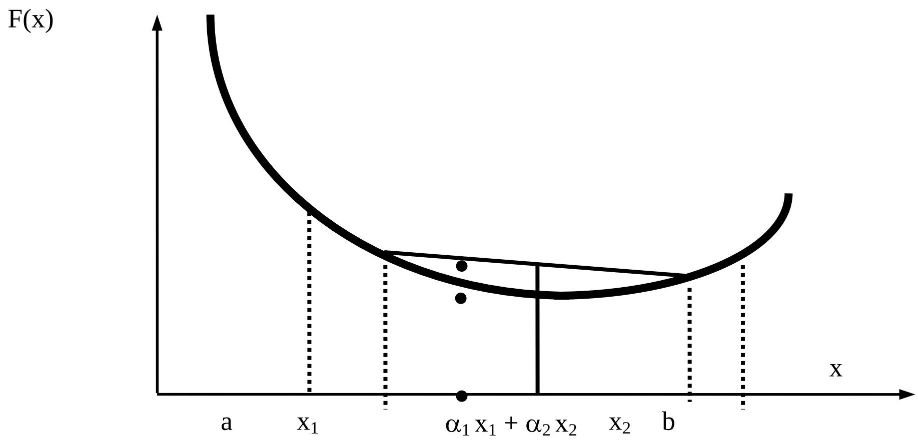
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

где x_1 и x_2 - любые две точки из интервала (a; b); α_1, $\alpha_2 \ge 0$, причём $\alpha_1+\alpha_2=1$.

Если для $\alpha_1 \ne 0$, $\alpha_2 \ne 0$ всегда имеет место строгое неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

то функция f называется ***строго выпуклой*** на (a; b). Геометрически выпуклая функция изображает дугу, график которой расположен ниже стягивающей её хорд.



Напомним также, что непрерывная и строго выпуклая функция f на замкнутом интервале принимает минимальное значение только в одной точке интервала.

2. Решение выпуклой игры

Для нахождения решения выпуклой игры можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 7. Пусть M(x, y) - непрерывная функция выигрышей игрока 1, на единичном квадрате и строго выпуклая по *y* для любого *x*. Тогда имеется единственная оптимальная чистая стратегия $y=y_o \in [0;1]$ для игрока 2, цена игры определяется по формуле

$$V = \min_y \max_x M(x, y),$$

значение y_o определяется как решение следующего уравнения

$$\max_x M(x, y_o) = V.$$

Замечание 1. Если в теореме 4 не предполагать строгую выпуклость функции M(x, y) по *y*, а просто выпуклость, то теорема остаётся в силе с тем отличием, что у игрока 2 оптимальная чистая стратегия не будет единственной.

Замечание 2. Выпуклые игры называют часто выпукло-вогнутыми, т.к. игра в них имеет седлообразное ядро, а т.к. ядро седлообразное, то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях.

Таким образом, если M(x, y) непрерывна и выпукла по *y*, то цена игры определяется по приведенной выше формуле и игрок 2 имеет оптимальную чистую стратегию, определяемую из уравнения.

Аналогично и для игрока 1: если функция выигрышей M(x, y) непрерывна по обоим аргументам и строго вогнута по *x* при любом *y*, то в этом случае игрок 1 имеет единственную оптимальную стратегию.

Цена игры определяется по формуле:

$$V = \max_x \min_y M(x,y),$$

а чистая оптимальная стратегия x_o игрока 1 определяется из уравнения

$$\min_y M(x_o, y) = V.$$

Пример. Пусть на квадрате [0; 1] задана функция

$$M(x, y) = \sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi(x+y)}{2} < 0 \quad \text{для } x \in [0;\ 1],\ y \in (0;1),$$

то M(x, y) строго вогнута по *x* для любого $y \in (0;1)$. Следовательно, цена игры находится по формуле

$$V = \max_x \min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Отметим, что при $0 \le x \le \frac{1}{2}$ справедливо равенство

$$\min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi x}{2}$$

а при $0{,}5 < x \le 1$

$$\min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi(x+1)}{2}$$

Поэтому

$$V = \max\left[\max_{0\le x\le \frac{1}{2}} \min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2};\ \max_{\frac{1}{2}\le x\le 1} \min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2}\right] =$$

$$= \max\left[\max_{0\le x\le \frac{1}{2}} \sin\frac{\pi x}{2};\ \max_{\frac{1}{2}\le x\le 1} \sin\frac{\pi(x+1)}{2}\right] =$$

$$= \max\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При этом значение x получается равным $x_o=\frac{1}{2}$. Это же значение получается из решения уравнения

$$\min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т.к. минимум достигается при y=0, и это уравнение превращается в следующее:

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда следует, что $x = \frac{1}{2}$.

Заметим, что если в функции выигрышей поменять местами x и y, то она не изменится, а, следовательно, эта функция выпукла и по y при всех $x\in[0; 1]$. Поэтому к ней применима та же теория, т.е. у игрока 2 существует оптимальная чистая стратегия y_o, определяемая из уравнения:

$$\max_{0\le x\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Очевидно, максимум по *x* достигается при $x=\frac{1}{2}$, и последнее уравнение примет вид:

$$\sin\frac{\pi\left(\frac{1}{2}+y\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решением последнего уравнения будет $y_o=0$. Следовательно, игрок 2 имеет оптимальную чистую стратегию $y_o=0$.

Замечание. В приведённом выше примере мы могли определить оптимальную стратегию игрока 1, а игрока 2 - только случайно, в силу удачного вида M(x, y).

3. Решение выпуклой игры в существенных стратегиях

Рассмотрим теперь метод определения оптимальных стратегий того игрока, для которого функция выигрышей не обязательно выпукла. Пусть непрерывная функция M(x, y), заданная на единичном квадрате, выпукла по *y*. Нас будет интересовать вопрос нахождения оптимальных стратегий 1 игрока. Предположим также, что для $x \in[0; 1]$, $y\in[0; 1]$ существует частная производная функции M(x, y) по *y*, причём в точках *y*=0 и *y*=1 $M'_y(x, y)=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ понимается как правая и левая производная соответственно.

Обозначим через y_o одну из оптимальных чистых стратегий игрока 2 (эта стратегия существует в соответствии с теоремой).

Согласно теореме чистые стратегии x игрока 1 могут входить в его оптимальную стратегию с положительной вероятностью, если для них выполняется равенство $M(x, y_o)=V$.

Такие чистые стратегии x называются ***существенными стратегиями.***

Теорема 8. Пусть дана бесконечная антагонистическая игра с непрерывной и дифференцируемой по y на единичном квадрате при любом x функцией выигрышей M (x, y), с оптимальной чистой стратегией y_o игрока 2 и ценой игры V, тогда:

1) если $y_o=1$, то среди оптимальных стратегий игрока 1 имеется существенная чистая стратегия x_1, для которой

$$M'_y(x_1, 1) \le 1;$$

2) если $y_o=0$, то среди оптимальных стратегий игрока 1 имеется существенная чистая стратегия x_2, для которой

$$M'_y(x_2, 0) \ge 0;$$

3) если $0\le y_o\le 1$, то среди оптимальных стратегий игрока 1 найдётся такая, которая является смесью двух существенных стратегий x_1 и x_2. Для этих стратегий

$$M'_y(x_1, y_o) \le 0,\quad M'_y(x_2, y_o)\ge 0,$$

стратегия x_1 употребляется с вероятностью α, стратегия x_2 - с вероятностью $(1-\alpha)$, где α находится из уравнения

$$\alpha\, M'_y(x_1, y_o) + (1-\alpha)\, M'_y(x_2, y_o) = 0.$$

Пример. Пусть функция выигрышей в бесконечной антагонистической игре задана на единичном квадрате и равна $M(x, y) = (x - y)2 = x^2 - 2xy + y^2$.

Эта функция непрерывна по x и y, и поэтому эта игра имеет решение. Кроме того $\frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial y^2}=2>0$. Следовательно, M(x, y) выпукла по y, и поэтому, согласно теореме 4, цена игры определяется по формуле, игрок 2 имеет чистую оптимальную стратегию y_o, определяемую из уравнения. Таким образом, имеем $V=\min\limits_{y}\max\limits_{x}(x-y)^2$;

Для определения $\max\limits_{x}(x^2 - 2xy + y^2)$ последовательно найдём

$\frac{\partial M}{\partial x} = 2x - 2y := 0 \Rightarrow x = y$

$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 2 > 0 \Rightarrow$ при x = y функция M имеет минимум для любого y.

$\Rightarrow$ максимум достигается в одной из крайних точек x=0 и (или) x=1

$M(0; y) = y^2$

$M(1; y) = 1 - 2y + y^2 = (y - 1)^2$

$V=\min\limits_{0\le y\le 1}\max\{y^2; (1-y)^2\}$

Данный $\min\limits_{0\le y\le 1}\max\{...\}$ достигается в том случае, если $y^2 = (1 - y)^2$, т.е. $y = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $V = \frac{1}{4}$ при $y_o = \frac{1}{2}$.

Определим теперь оптимальные стратегии для игрока 1. Поскольку $y_o = \frac{1}{2}$, то $0<y_o<1$. Согласно теореме рассмотрим третий случай.

Определим x из уравнения $M(x, y_o) = V$,

т.е. $(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Решая последнее уравнение, получим $x_1=0$, $x_2=1$. Теперь необходимо определить величину α - вероятность применения чистой стратегии $x_1=0$. С этой целью используем уравнение:

$\alpha M_y'(0, \frac{1}{2}) + (1 - \alpha) M_y'(1, \frac{1}{2}) = 0.$

Нетрудно найти

$$M_y'(0; \frac{1}{2}) = -2(x-y)\Big|_{\substack{x=0\\ y=1/2}} = +1,$$

$$M_y'(1; \frac{1}{2}) = -2(x-y)\Big|_{\substack{x=1\\ y=1/2}} = -1.$$

Тогда уравнение для α примет вид: $\alpha - (1 - \alpha) = 0$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}$.

Следовательно, стратегия игрока 1: $F(x) = \frac{1}{2} J_o(x) + \frac{1}{2} J1(x)$, а игрока 2: $Q(y) = J_{1/2}(y)$.

Здесь через $J_a(x)$ обозначена ступенчатая функция

$$J_a(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le a \\ 1, & при\ x \ge a \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как называется задача принятия решения, в которой на систему воздействует не одна, а несколько управляющих подсистем, каждая из которых имеет свои цели и возможности действий?
2. Математическая модель какого конфликта называется антагонистической игрой?
3. Какая игра называется антагонистической?
4. В чем содержательное различие между управляющей подсистемой и средой?
5. Как называется антагонистическая игра, если X и Y конечны?

6. Как определяются нижняя цена игры и верхняя цена игры? Как определяется цена игры?
7. Каково соотношение между максимином и минимаксом?
8. Что такое седловая точка? К чему приводит одностороннее отступление игрока от седловой точки?
9. Чему равно значение функции выигрыша в седловой точке?
10. Сформулируйте теорему о взаимозаменяемости и эквивалентности седловых точек.
11. Сформируйте достаточное условие существования седловой точки.
12. При каких условиях в выпуклой игре у игрока есть единственная оптимальная стратегия?

ТЕМА 8. Кооперативные игры

Цель: изучить особенности решения кооперативных игр.

Ключевые слова: кооперативная игра, решение кооперативной игры, чистая и смешанная стратегии, седловая точка.

Вопросы:

1. Понятие кооперативной игры.
2. Характеристическая функция.
3. Кооперативные игры с малым числом игроков.

1. Понятие кооперативной игры

Кооперативные игры получаются в тех случаях, когда в игре n игроков разрешается образовывать определённые коалиции. Обозначим через N множество всех игроков, N={1, 2,..., n}, а через K - любое его подмножество. Пусть игроки из K договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно числу сочетаний из n по r, т.е. C_n^r, а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1.$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом n. Образовав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков.

2. Характеристическая функция

Функция υ, ставящая в соответствие каждой коалиции K наибольший, уверенно получаемый ею выигрыш υ(K), называется ***характеристической функцией*** игры. Так, например, для бескоалиционной игры n игроков υ(K) может получиться, когда игроки из множества K оптимально действуют как один игрок против остальных N\K игроков, образующих другую коалицию (второй игрок).

Характеристическая функция υ называется ***простой***, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция υ простая, то коалиции K, для которых υ(K)=1, называются ***выигрывающими***, а коалиции K, для которых υ(K) = 0 - ***проигрывающими***.

Если в простой характеристической функции υ выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию R, то характеристическая функция υ, обозначаемая в этом случае через υR, называется ***простейшей.***

Содержательно простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Более сложным является пример оценки результатов голосования в Совете безопасности ООН, где выигрывающими коалициями являются все коалиции, состоящие из всех пяти постоянных членов Совета плюс ещё хотя бы один непостоянный член.

Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое ядро, голосующее с соблюдением правила вето, а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Обозначим через υG характеристическую функцию коалиционной игры. Эта функция обладает следующими свойствами:

1. Персональность: $\upsilon G(\varnothing) = 0$, т.е. коалиция, не содержащая ни одного игрока, ничего не выигрывает.

2. Супераддитивность: $\upsilon G(K \cup L) \geq \upsilon G(K) + \upsilon G(L)$, если $K, L \subset N$, $K \cap L \neq \varnothing$, т.е. общий выигрыш коалиции не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции.

3. ***Дополнительность:*** $\upsilon G(K) + \upsilon(N \backslash K) = \upsilon(N)$, т.е. для бескоалиционной игры с постоянной суммой сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков.

Распределение выигрышей (делёж) игроков должно удовлетворять следующим естественным ***условиям***:

1. Индивидуальная рациональность: если обозначить через x_i выигрыш i-го игрока, то, во-первых, должно удовлетворяться условие

$$x_i \geq \upsilon(i), \text{ для } i \in N$$

т.е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции).

2. Коллективная рациональность: должно удовлетворяться условие

$$\sum_{i \in N} x_i = \upsilon(N),$$

т.е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $\upsilon(N)$, то игрокам незачем вступать в коалицию; если же потребовать, чтобы сумма выигрышей была больше, чем $\upsilon(N)$, то это значит, что игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть).

Таким образом, вектор $x=(x_1,...,x_n)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется ***дележом*** в условиях характеристической функции υ.

Система $\{N, \upsilon\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям в условиях характеристической функции, называется ***классической кооперативной игрой.***

Из этих определений непосредственно вытекает следующая теорема:

Теорема 9. Чтобы вектор $x=(x_1,...,x_n)$ был дележом в классической кооперативной игре $\{N, \upsilon\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_i = \upsilon(i) + \alpha i, \ (i \in N),$$

причём

$$\alpha i \geq 0 \quad (i \in N)$$

$$\sum_{i \in N} \alpha_i = \upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i)$$

Исходом в кооперативной игре является дележ, возникающий не как следствие действия игроков, а как результат их соглашений. Поэтому в кооперативных играх сравниваются не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи, и сравнение это носит более сложный характер.

Кооперативные игры считаются ***существенными***, если для любых коалиций K и L выполняется неравенство:

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) < \upsilon(K \cup L),$$

т.е. в условии супераддитивности выполняется строгое неравенство.

Если же в условии супераддитивности выполняется равенство

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) = \upsilon(K \cup L),$$

т.е. выполняется свойство аддитивности, то такие игры называются ***несущественными.***

Справедливы следующие ***свойства:***

1) для того, чтобы характеристическая функция была аддитивной (кооперативная игра - несущественной), необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$\sum_{i \in N} \upsilon(i) = \upsilon(N)$$

2) в несущественной игре имеется только один делёж:

$$\{\upsilon(1), \upsilon(2),...,\upsilon(n)\};$$

3) в существенной игре с более, чем одним игроком, множество дележей бесконечно

$$(\upsilon(1) + \alpha 1, \upsilon(2) + \alpha 2,...,\upsilon(n) + \alpha n)),$$

где

$$\alpha i \geq 0 \ (i \in N), \ \upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i) > 0$$

Кооперативная игра с множеством игроков N и характеристической функцией υ называется ***стратегически эквивалентной игрой*** с тем же множеством игроков и характеристической функцией υ_1, если найдутся такие $k>0$ и произвольные вещественные C_i ($i \in N$), что для любой коалиции $K \subset N$ имеет место равенство:

$$\upsilon_1(K) = k\,\upsilon(K) + \sum_{i \in K} C_i$$

Смысл определения стратегической эквивалентности кооперативных игр состоит в том, что характеристические функции стратегической эквивалентности кооперативных игр отличаются только масштабом измерения выигрышей k и начальным капиталом C_i. Стратегическая эквивалентность кооперативных игр с характеристическими функциями υ и υ_1 обозначается так: $\upsilon \sim \upsilon_1$. Часто вместо стратегической эквивалентности кооперативных игр говорят о стратегической эквивалентности их характеристических функций.

Справедливы следующие свойства для стратегических эквивалентных игр:

1. Рефлексивность, т.е. каждая характеристическая функция эквивалентна себе: $\upsilon \sim \upsilon$.

2. Симметрия, т.е. если $\upsilon \sim \upsilon_1$, то $\upsilon_1 \sim \upsilon$.

3. Транзитивность, т.е. если $\upsilon \sim \upsilon_1$ и $\upsilon_1 \sim \upsilon_2$, то $\upsilon \sim \upsilon_2$.

Из свойств рефлексивности, симметрии и транзитивности вытекает, что множество всех характеристических функций единственным образом распадается на попарно непересекающиеся классы, которые называются ***классами стратегической эквивалентности.***

Отношение стратегической эквивалентности игр и их характеристических функций переносится на отдельные дележи: пусть $\upsilon \sim \upsilon_1$ и $x=(x_1,...,x_n)$ - дележи в условиях характеристической функции υ; рассмотрим вектор $x_1=(x_1^1,...,x_n^1)$, где $x_i^1 = kx_i+C_i$; для него выполняется

$$x_i^1 = k\, x_i + C_i \geq k\, \upsilon(\, i\,) + C_i = \upsilon_1(\, i\,);$$

т.е. выполняется условие индивидуальной рациональности, и

$$\sum_{i\in N} x_i^1 = \sum_{i\in N}(k\,x_i + C_i) = k\sum_{i\in N} x_i + \sum_{i\in N} C_i = k\,\upsilon(N) + \sum_{i\in N} C_i = \upsilon_1(N),$$

таким образом выполняется условие коллективной рациональности. Поэтому вектор x^1 является дележом в условиях υ_1. Говорят, что делёж x_1 соответствует дележу x при стратегической эквивалентности $\upsilon \sim \upsilon_1$.

Кооперативная игра называется ***нулевой,*** если все значения её характеристической функции равны нулю. Содержательное значение нулевой игры состоит в том, что в ней игроки не имеют никакой заинтересованности.

Всякая несущественная игра стратегически эквивалентна нулевой.

Кооперативная игра с характеристической функцией υ имеет ***(0, 1)-редуцированную форму***, если выполняются соотношения:

$$\upsilon(i)=0 \quad (i\in N) \quad \upsilon(N)=1.$$

Теорема 10. Каждая существенная кооперативная игра стратегически эквивалентна одной и только одной игре в (0, 1)-редуцированной форме.

Сформулированная теорема показывает, что мы можем выбрать игру в (0, 1)-редуцированной форме для представления любого класса эквивалентности игр. Удобство этого выбора состоит в том, что в такой форме значение $\upsilon(K)$ непосредственно демонстрирует нам силу коалиции S (т.е. ту дополнительную прибыль, которую получают члены коалиции, образовав её), а все дележи являются вероятностными векторами.

В игре в (0,1)-редуцированной форме дележом является любой вектор $x=(x_1,...,x_n)$, для которого

$$x_i \geq 0 \quad (i \in N) \quad \sum_{i\in N} x_i = 1.$$

3. Кооперативные игры с малым числом игроков

Как было сказано ранее, для каждого множества игроков N существует единственный класс стратегически эквивалентных несущественных игр с множеством игроков N. Таким образом, остаётся рассмотреть классы существенных кооперативных игр.

Рассмотрим сначала классы игр в (0, 1)-редуцированной форме для случая игр с нулевой суммой.

1**. Игры 2-х игроков.** Всякая кооперативная игра двух игроков с нулевой суммой является несущественной.

Предположим, что имеется существенная кооперативная игра двух игроков с характеристической функцией υ, тогда она должна быть стратегически эквивалентна некоторой игре в (0, 1)-редуцированной форме с характеристической функцией υ_1, что означает следующее:

$$\upsilon_1(1)=0, \quad \upsilon_1(2)=0, \quad \upsilon_1(1,2)=1$$

По свойству дополнительности должно

$$\upsilon_1(2)=\upsilon_1(1,2)-\upsilon_1(1)=1-0=1,$$

что противоречит условию. А это значит, что наше предположение о существенности кооперативной игры двух игроков с нулевой суммой неверно.

Итак, класс кооперативных игр двух игроков с нулевой суммой ограничивается несущественными играми.

2. Игры 3-х игроков. Пусть υ - характеристическая функция существенной игры в (0, 1)-редуцированной форме, тогда

$$\upsilon(1) = \upsilon(2) = \upsilon(3) = 0, \upsilon(1,2,3) = 1.$$

По свойству дополнительности имеем:

$$\upsilon(1,2) = \upsilon(1,2,3) - \upsilon(3) = 1- 0 =1,$$
$$\upsilon(1,3) = \upsilon(1,2,3) - \upsilon(2) = 1- 0 =1,$$
$$\upsilon(2,3) = \upsilon(1,2,3) - \upsilon(1) = 1- 0 =1,$$

и, таким образом, характеристическая функция полностью определена. Итак, имеется два класса кооперативных игр трёх игроков с нулевой суммой: класс существенных и класс несущественных игр.

3. Игры 4-х игроков. Рассмотрим все классы стратегической эквивалентности таких игр. Прежде всего, имеется класс несущественных игр в (0, 1)-редуцированной форме. Определим характеристическую функцию υ такой игры

$$\upsilon(1) = \upsilon(2) = \upsilon(3) = \upsilon(4) = 0$$
$$\upsilon(1,2,3,4) = 1.$$

Исходя из свойства дополнительности, получаем:

$$\upsilon(1,2,3) = \upsilon(1,2,3,4) - \upsilon(4) = 1-0 =1;$$
$$\upsilon(1,2,4) = \upsilon(1,2,3,4) - \upsilon(3) = 1- 0 =1;$$
$$\upsilon(1,3,4) = \upsilon(1,2,3,4) - \upsilon(2) = 1- 0 =1;$$
$$\upsilon(2,3,4) = \upsilon(1,2,3,4) - \upsilon(1) = 1- 0 =1.$$

Теперь необходимо определить значения характеристической функции на коалициях двух игроков. Всего таких коалиций шесть:

(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4).

Характеристическая функция на этих коалициях согласно свойству дополнительности удовлетворяет только следующим соотношениям:

$$\upsilon(1,4) = 1- \upsilon(2,3),$$
$$\upsilon(1,3) = 1- \upsilon(2,4),$$
$$\upsilon(1,2) = 1- \upsilon(3,4).$$

Так как значений неизвестных шесть, а соотношений только три, то три значения из шести могут быть выбраны произвольно. Обозначим эти произвольные значения через x_1, x_2, x_3, т.е.

$$\upsilon(1,4) = x_1 ,\ \upsilon(2,4) = x_2 ,\ \upsilon(3,4) = x_3,$$

Тогда

$$\upsilon(2,3) = 1- x_1 ,\ \upsilon(1,3) = 1- x_2 ,\ \upsilon(1,2) = 1- x_3 .$$

Кроме того, должно быть

$$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1,$$

т.к. значение характеристической функции на коалиции из двух игроков не может быть меньше, чем значение характеристической функции для одного из этих игроков (равное нулю для одного игрока), и не может быть больше, чем значение характеристической функции для коалиции из трёх игроков (равное 1 для трех игроков). Геометрически (x_1, x_2, x_3) можно изобразить как точку единичного куба, т.е. каждому классу стратегической эквивалентности игр четырёх игроков будет соответствовать точка единичного куба.

Итак, множество классов стратегической эквивалентности существенных игр четырёх игроков бесконечно и зависит от трёх произвольных параметров.

4. Игры, состоящие из более, чем 4-х игроков. Имеют большее разнообразие классов стратегической эквивалентности существенных игр. Так, размерность множества классов игр n игроков равна $2^{n-1}-n-1$, т.е. имеется $2^{n-1}-n-1$ произвольных параметров.

ТЕМА 9. Подходы к решению кооперативных игр

Цель: изучить особенности решения кооперативных игр.

Ключевые слова: кооперативная игра, решение кооперативной игры, решение Неймана-Моргенштерна, подход Шепли.

Вопросы:

1. Понятие дележа в кооперативной игре.
2. Решение Неймана-Моргенштерна.
3. Подход Шепли.

1. Понятие дележа в кооперативной игре

Для исследования игр большое значение имеет возможность учёта предпочтения дележей, который осуществляется с помощью понятия доминирования.

Пусть имеется два дележа x = (x_1,...,x_n) и y = (y_1,...,y_n) в кооперативной игре G={N,υ}, и K⊂N - некоторая коалиция. Тогда делёж *x* доминирует *y* по коалиции K, если

1) $\sum_{i \in K} x_i \le \upsilon(K)$ (свойство эффективности доминирующего платежа);

2) $x_i > y_i$ для всех $i \in K$ (свойство предпочтительности).

Свойство эффективности означает, что сравниваемый коалицией дележ *x* должен быть реализуемым этой коалицией: сумма выигрышей каждого из членов коалиции не должна превосходить уверенно получаемое ею количество. В противном случае коалиция, встретившись с дележом, дающим ей столько, сколько она самостоятельно не в состоянии добиться, должна согласиться на него и не заниматься его сравнением с какими-либо другими дележами.

Условие предпочтительности отражает необходимость единодушия в предпочтении со стороны коалиции: если хотя бы одно из неравенств $x_i > y_i$ будет нарушено, т.е. если хотя бы для одного из членов коалиции K выигрыш в условиях дележа *y* будет не меньшим, чем в условиях дележа *x*, то можно будет говорить о предпочтении дележа *x* дележу *y* не всей коалицией K, а только теми её членами, для которых соответствующее неравенство $x_i > y_i$ соблюдается.

Соотношение доминирования *x* над *y* по коалиции K обозначается через $x \underset{K}{>} y$.

Дележ *x* доминирует *y*, если существует такая коалиция K, для которой дележ *x* доминирует *y*. Это доминирование обозначается так: x>y.

Наличие доминирования x>y означает, что во множестве игроков N найдётся коалиция, для которой *x* предпочтительнее *y*. Отношение доминирования не обладает полностью свойствами рефлексивности, симметрии, транзитивности, возможна только частичная симметрия и транзитивность. Соотношение доминирования возможно не по всякой коалиции. Так, невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 11. Если υ и υ_1 - две стратегически эквивалентные характеристические функции, причём дележам *x* и *y* соответствуют дележи x^1 и y^1, то из *x*>*y* следует $x^1 > y^1$.

Очевидно, все явления, описываемые в терминах доминирования дележей, относятся к классам стратегической эквивалентности, поэтому достаточно изучать эти классы (а не сами игры) для существенных игр по их (0, 1)-редуцированной форме, а для несущественных игр - по нулевым играм.

В любой несущественной игре имеется только один делёж, поэтому никаких доминирований в ней нет.

Рассмотрим доминирование дележей в существенной игре на следующем примере.

Пример. Пусть имеется (0, 1)-редуцированная форма существенной игры трёх игроков с постоянной суммой (равной 1). Поскольку доминирование невозможно ни по одной из одноэлементных коалиций 1,2,3, а также по коалиции, состоящей из всех трёх игроков, то доминирование возможно только по одной из двухэлементных коалиций {1,2}, {1,3}, {2,3}.

Для наглядности доминирования дележей введём понятие барицентрических координат. Осями координат служат три оси x_1, x_2, x_3, составляющие между собой одинаковые углы 60^o, ось x_3 находится на расстоянии единицы от точки пересечения осей x_1 и x_2 (рис. 1), координаты точки $x=(x_1, x_2, x_3)$ - соответственно расстояния от этой точки до осей x_1, x_2, x_3, взятые с такими знаками, как указано на рис.1. (Например, для точки *x* на рис. 1 $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$).

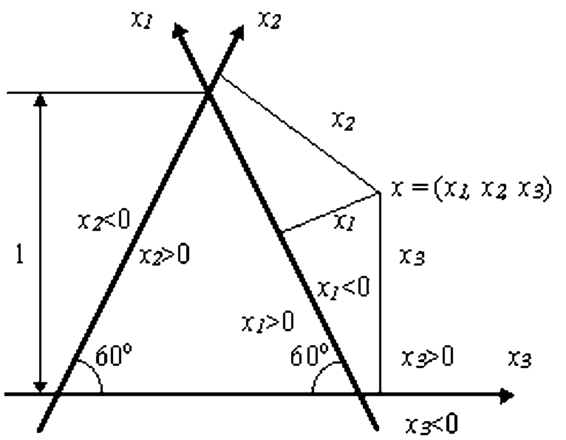


Рис.1

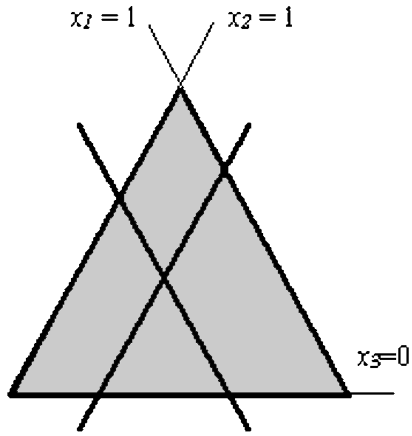


Рис.2

В барицентрической системе координат всегда выполняется равенство:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

В плоскости всегда имеется точка с координатами x_1, x_2, x_3, удовлетворяющими равенству. Поэтому барицентрическая система координат автоматически удовлетворяет одному из условий, определяющих исход игры трёх игроков. С другой стороны, поскольку игра в (0, 1)-редуцированной форме, то точка *x* должна находиться в заштрихованном треугольнике. Дележи x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять неравенствам:

$$x_1 + x_2 \le \upsilon(1, 2), \quad x_1 + x_3 \le \upsilon(1, 3), \quad x_2 + x_3 \le \upsilon(2, 3).$$

Очевидно, из условия дополнительности, что $x_1 + x_2 = 1 - x_3 \le 1 = \upsilon(1, 2)$, $x_1 + x_3 \le 1$, $x_2 + x_3 \le 1$.

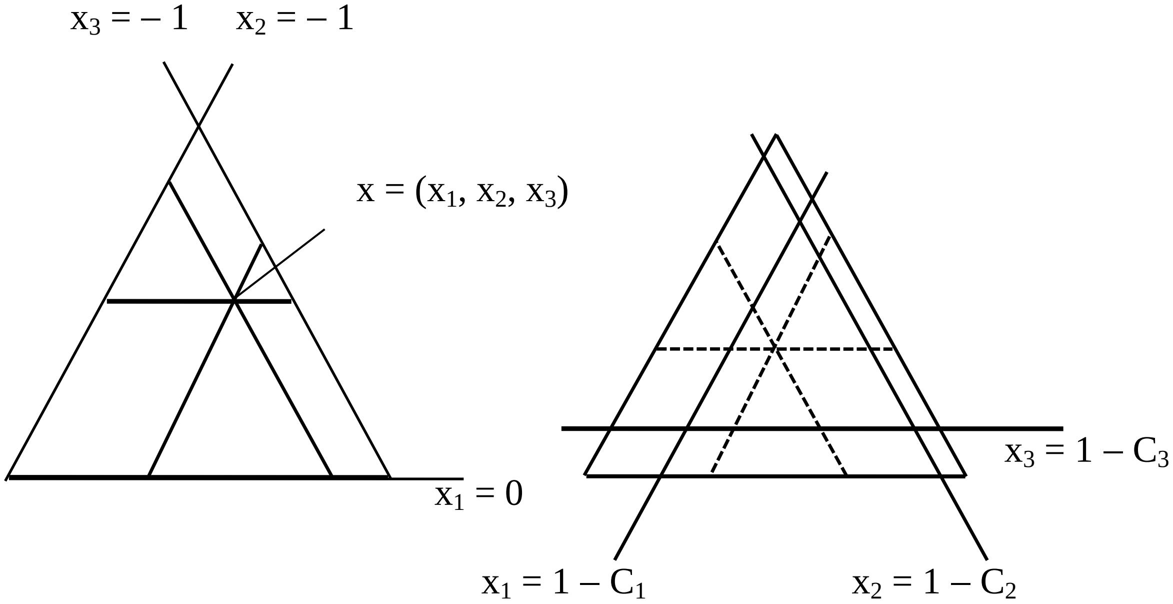
Делёж $x = (x_1, x_2, x_3)$ доминирует дележ $y = (y_1, y_2, y_3)$

по коалиции $\{1, 2\}$, если $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$;

по коалиции $\{1, 3\}$, если $x_1 > y_1$, $x_3 > y_3$;

по коалиции $\{2, 3\}$, если $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$,

т.е. если дележ *y* находится в одном из заштрихованных параллелограммов (за исключением трёх граничных прямых, проходящих через точку x) на рис. 3, то дележ *x* доминирует дележ *y*, а всякая точка, находящаяся в незаштрихованных треугольниках, является предпочтительнее исхода *x*.



Таким образом, если *x* и *y* – два исхода и ни один из них не предпочтительнее другого, то соответствующие точки лежат на прямой, параллельной одной из координатных осей.

Пример. Пусть имеется (0, 1)-редуцированная игра трёх игроков с ненулевой суммой.

Рассмотрим сначала условия доминирования дележа $x=(x_1, x_2, x_3)$ над дележом $y=(y_1, y_2, y_3)$ по коалиции $\{1, 2\}$. В этом случае имеем:

$$x_1 + x_2 \le \upsilon(1, 2) = C_3$$

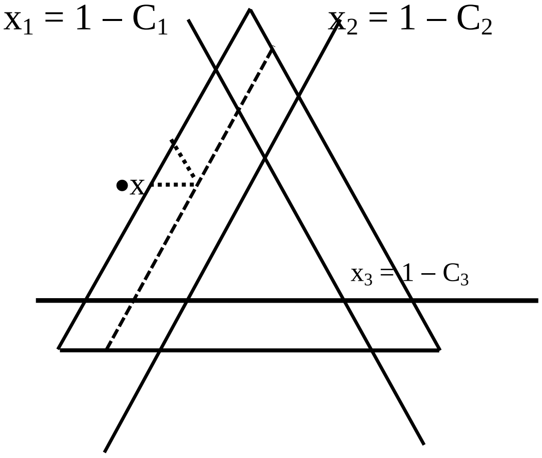
$$y_1 < x_1,\ y_2 < x_2.$$

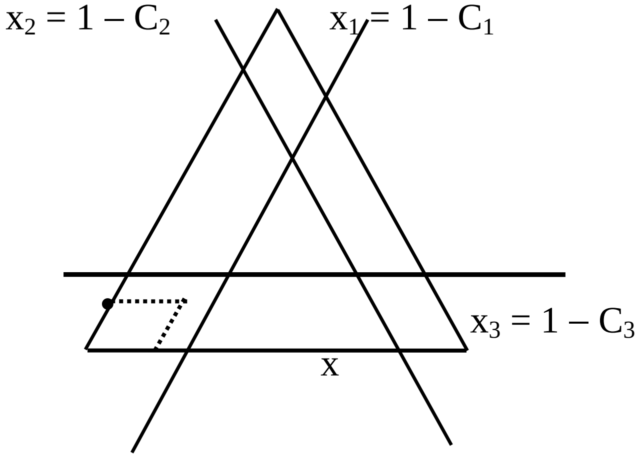
Поскольку может быть, что $C_3<1$, то первое из условий нельзя отбросить, как это делается в играх с постоянной суммой. Это значит, что *x* должна быть не ниже прямой $x_1 + x_2 = C_3$.

Или, учитывая последнее уравнение, принимает вид: $x_3 = 1 + C_3$.

Таким образом, если дележ *x* таков, что $x_1 \ge 1-C_1$, $x_2 \ge 1-C_2$, $x_3 \ge 1-C_3$, то имеется три параллелограмма, заштрихованных на рис., находясь в которых, точки *x* доминируют *y*.

Если одно из неравенств, например, третье, не имеет места, т.е. только 2 параллелограмма, заштрихованных на рисунке, находясь в некоторых точках *x* доминирует *y*.





Из рассмотренного примера видно, что существует много вариантов, которые возникают при изучении вопросов, связанных с доминированием дележей в кооперативных играх. С ростом числа игроков чрезвычайно быстро растёт количество таких вариантов. В связи с этим возникает необходимость выделения вполне устойчивых дележей, т.е. таких дележей, которые не доминируются никакими другими дележами. Множество вполне устойчивых дележей в кооперативной игре называются ***с-ядром*** этой игры.

Теорема 12. Для того чтобы дележ *x* принадлежал с-ядру кооперативной игры с характеристической функцией υ, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции K выполнялось неравенство

$$\upsilon(K) \le \sum_{i \in K} x_i$$

Поскольку неравенства линейны относительно *x*, то из последней теоремы следует, что с-ядро в любой кооперативной игре является выпуклым многогранником.

К особенностям кооперативных игр относительно существования с-ядра относятся:

1) в несущественной игре с-ядро существует и состоит из единственного дележа этой игры;

2) во всякой существенной игре с постоянной суммой с-ядро пусто.

Для общей игры трёх игроков в (0; 1)-редуцированной форме имеем следующее.

Её характеристическая функция имеет вид:

$$\upsilon(\varnothing) = \upsilon(1) = \upsilon(2) = \upsilon(3) = 0;$$

$$\upsilon(1, 2, 3) = 1,$$

$$\upsilon(1, 2) = C_3; \quad \upsilon(1, 3) = C_2; \quad \upsilon(2, 3) = C_1,$$

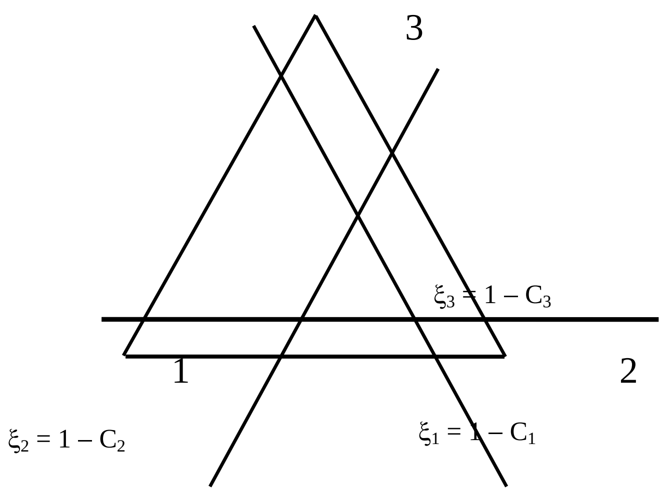
$$\text{где} \quad 0 \le C_1, C_2, C_3 \le 1.$$

На основании последней теоремы для принадлежности дележа x с-ядру необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$x_1 + x_2 \ge C_3, \quad x_1 + x_3 \ge C_2, \quad x_2 + x_3 \ge C_1$$

или, используя равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получим:

$$x_3 \le 1 - C_3, \quad x2 \le 1 - C_2, \quad x_3 \le 1 - C_1.$$



Это означает, что точка *x* должна лежать ближе к i-й вершине основного треугольника (см. рис.), чем прямая

$$\xi i = 1 - C_i \quad (i = 1,2,3)$$

Из неравенства путём суммирования получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 3 - (C_1 + C_2 + C_3)$$

или, учитывая, что $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получим:

$$C_1 + C_2 + C_3 \le 2.$$

Неравенство является необходимым условием существования непустого с-ядра. С другой стороны, если оно выполняется, то можно взять такие неотрицательные ε_1, ε_2, ε_3, чтобы

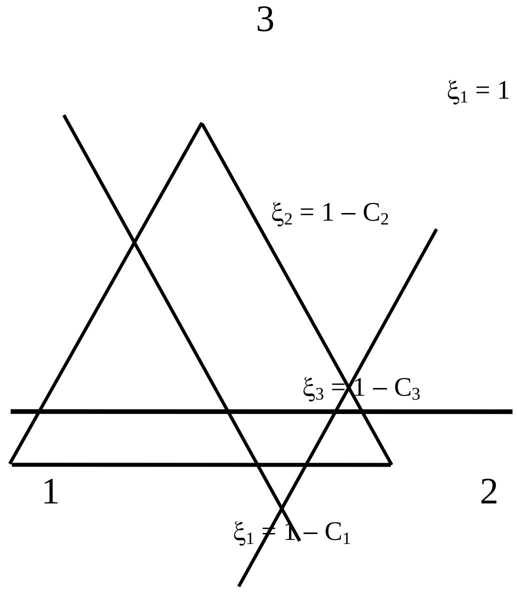
$$\sum_{i=1}^{3}(C_i + \varepsilon_i) = 2,$$

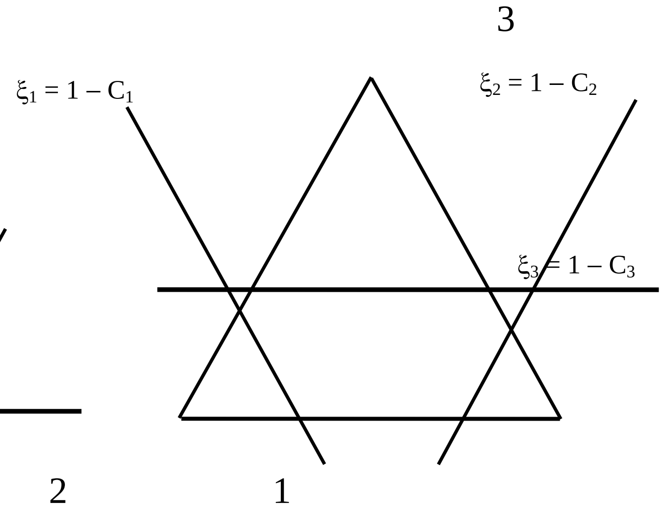
и положить

$$x_i = 1 - C_i - \varepsilon_i \quad (i = \overline{1,3})$$

Такие значения x_i и удовлетворяют неравенствам, т.е. такой дележ $x=(x_1, x_2, x_3)$ принадлежит с-ядру.

Геометрически непустое с-ядро является заштрихованным треугольником, со сторонами, выраженными уравнениями





при условии, что выполняется соотношение $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ и решения любой пары уравнений являются неотрицательными. Так, например, рассмотрим систему

$$\xi_1 = 1 - C_1, \ \ \xi_2 = 1 - C_2.$$

Поскольку $0 \le C_1 \le 1$, $0 \le C_2 \le 1$, то $\xi_1, \xi_2 \ge 0$.

Отсюда получаем: $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 = 1 - (1 - C_1) - (1 - C_2) = C_1 + C_2 - 1$.

Для того чтобы было $\xi_3 \ge 0$, необходимо чтобы $C_1 + C_2 - 1 \ge 0$ или $C_1 + C_2 \ge 1$.

В этом случае с-ядро представлено в виде заштрихованного треугольника внутри основного треугольника. Аналогично рассматриваются остальные возможные варианты сочетаний неравенств. Например, если $C_1 + C_2 < 1$, то с-ядро имеет вид заштрихованного четырёхугольника внутри основного треугольника (рис.). Вообще многогранник, представляющий с-ядро, образуется как выпуклый многогранник пересечением прямых и строк основного треугольника. Если, например, выполняются неравенства

$$C_1 + C_2 < 1; \ \ C_2 + C_3 < 1; \ \ C_1 + C_3 < 1,$$

то с-ядро представляется в виде шестигранника, заштрихованного на рисунке.

Очевидно, в решение кооперативной игры должны входить дележи, лучшие с определённой точки зрения. Так, дележи, входящие в с-ядро, являются устойчивыми в несколько пассивном смысле, т.е. при этих обстоятельствах нет оснований отклоняться от такого дележа. Однако найти дележ, который не только не доминировался бы какими-либо другими дележами, но сам доминировал бы любой другой дележ, не удается. Поэтому решение отыскивают на пути расширения класса дележей. И это расширение состоит в том, что решением игры должен быть не один делёж, а некоторое их множество.

2. Решение Неймана-Моргенштерна.

Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн предложили потребовать от множества дележей, которое принимается в качестве решения кооперативной игры, следующие два свойства: внутреннюю устойчивость, состоящую в том, чтобы дележи из решений нельзя было противопоставить друг другу, и внешнюю устойчивость, состоящую в возможности каждому отклонению от решения противопоставлять некоторый делёж, принадлежащий решению. В результате мы приходим к следующему определению:

Решением по Нейману-Моргенштерну (Н-М-решением) кооперативной игры называется множество R дележей в нем, обладающее следующими свойствами:

1) внутренняя устойчивость: никакие два дележа из R не доминируют друг друга;

2) внешняя устойчивость: каков бы ни был дележ S не принадлежащий R, найдется дележ r, принадлежащий R, который доминировал бы S.

Содержательная интерпретация Н-М-решения состоит в том, что любые две нормы поведения, соответствующие Н-М-решению, не могут быть противопоставлены друг другу; каково бы ни было отклонение от допустимых поведений, найдётся такая коалиция, которая будет стремиться к восстановлению нормы.

Теорема 13. Если в кооперативной игре существует с-ядро C и Н-М-решение R, то $C \subset R$.

Н-М-решение кооперативной игры не может состоять только из одного дележа, т.к. в этом случае характеристическая функция игры несущественная.

***Недостатки Н-М-решения*.**

1. Известны примеры кооперативных игр, которые не имеют Н-М-решений. Более того, в настоящее время не известно каких-либо критериев, позволяющих судить о наличии у кооперативных игр Н-М-решений. Тем самым заложенный в Н-М-решении принцип оптимальности не является универсально реализуемым, и область его реализуемости пока остаётся неопределённой.

2. Кооперативные игры, если имеют Н-М-решения, то, как правило, более одного. Поэтому принцип оптимальности, приводящий к Н-М-решению, не является полным: он, вообще говоря, не в состоянии указать игрокам единственной системы норм распределения выигрыша.

3. Решения существенных кооперативных игр состоит более, чем из одного дележа. Таким образом, даже выбор какого-либо конкретного Н-М-решения ещё не определяет выигрыша каждого из игроков.

4. Понятие Н-М-решения отражает только в очень малой степени черты справедливости.

Перечисленные недостатки отражают положение дел в действительности: большинство экономических и социальных проблем допускает множественные решения, и эти решения не всегда поддаются непосредственному сравнению по их предпочтительности.

3. Подход Шепли

Перечисленные недостатки Н-М-решения коалиционных игр способствуют поискам новых подходов. Одним из таких подходов является подход Шепли, суть которого в том, что он строится на основании аксиом, отражающих справедливость дележей.

Носителем игры с характеристической функцией υ называется такая коалиция T, что $\upsilon(S) = \upsilon(S \cap T)$для любой коалиции S.

Смысл носителя T состоит в том, что любой игрок, не принадлежащий T, является нейтральным, он не может ничего внести в коалицию и ему ничего не следует выделять из общих средств.

Пусть υ - характеристическая функция кооперативной игры n игроков, π - любая перестановка множества N игроков. Через $\pi\upsilon$ обозначим характеристическую функцию такой игры, что для коалиции $S = \{i1, i2, ..., iS\}$ будет

$$u(\{\pi(i1), \pi(i2), ..., \pi(iS)\}) = \upsilon(S).$$

Содержательный смысл функции $\pi\upsilon$ состоит в том, что если в игре с характеристической функцией υ поменять местами игроков, согласно перестановке π, то получим игру с характеристической функцией $\pi\upsilon$.

Аксиомы Шепли

1. Аксиома эффективности. Если S - любой носитель игры с характеристической функцией υ, то

$$\sum_{i\in S}\varphi_i(\upsilon) = \upsilon(S)$$

Иными словами, справедливость требует, что при разделении общего выигрыша носителя игры ничего не выделять на долю посторонних, не принадлежащих этому носителю, равно как и ничего не взимать с них.

2. Аксиома симметрии. Для любой перестановки π и i∈N должно выполняться $\varphi_{(\pi i)}(\pi\upsilon) = \varphi_i(\upsilon)$, т.е. игроки, одинаково входящие в игру, должны по справедливости получать одинаковые выигрыши.

3. Аксиома агрегации. Если есть две игры с характеристическими функциями υ′ и υ″, то $\varphi_i(\upsilon' + \upsilon'') = \varphi_i(\upsilon') + \varphi_i(\upsilon'')$, т.е. ради справедливости необходимо считать, что при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться.

Вектором цен (вектором Шепли) игры с характеристической функцией υ называется n-мерный вектор $\varphi(\upsilon) = (\varphi_1(\upsilon), \varphi_2(\upsilon), ..., \varphi_n(\upsilon))$, удовлетворяющий аксиомам Шепли.

Существование вектора Шепли вытекает из следующей теоремы.

Теорема 14. Существует единственная функция φ, определённая для всех игр и удовлетворяющая аксиомам Шепли.

Характеристическая функция ωS(T), определённая для любой коалиции S, называется ***простейшей***, если

$$\omega S(T) = \begin{cases} 1, & \text{при } S \subset T, \\ 0, & \text{при } S \not\subset T. \end{cases}$$

Содержательно простейшая характеристическая функция описывает такое положение дел, при котором множество игроков S выигрывает единицу тогда и только тогда, когда оно содержит некоторую основную минимальную выигрывающую коалицию S.

Можно доказать, что компоненты вектора Шепли в явном виде запишутся следующим образом:

$$\varphi_i(\upsilon) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\varphi_i(T)\left[\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})\right] = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)}{n!}\left[\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})\right],$$

где t - число элементов в T.

Вектор Шепли содержательно можно интерпретировать следующим образом: предельная величина, которую вносит i-й игрок в коалицию T, выражается как υ(T)–υ(T \{i}) и считается выигрышем i-го игрока; γi (T) - это вероятность того, что i-й игрок вступит в коалицию T \{i}; φi (υ) - средний выигрыш i-го игрока в такой схеме интерпретации. В том случае, когда υ - простейшая,

$$\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})=\begin{cases}1\ , & \text{если T выигрывающая коалиция,}\\ 0\ , & \text{если T выигрывающая коалиция, а}\\ & T\setminus\{i\}\ \textit{не выигрывающая}\ \text{коалиция.}\end{cases}$$

Следовательно,

$$\varphi_i(\upsilon)=\sum_T \gamma_i(T)=\sum_T \frac{(t-1)!\ (n-t)!}{n!},$$

где суммирование по T распространяется на все такие выигрывающие коалиции T, что коалиция T \{i}не является выигрывающей.

Пример. Рассматривается корпорация из четырёх акционеров, имеющих акции соответственно в следующих размерах: $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 30$, $a_4 = 40$.

Решение. Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций. Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырёх игроков, в которой выигрывающими являются следующие коалиции:

{2; 4}, {3; 4},

{1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {2; 3; 4}, {1; 3; 4},

{1; 2; 3; 4}.

Найдём вектор Шепли для этой игры.

При нахождении φ_1 необходимо учитывать, что имеется только одна коалиция T={1;2;3}, которая выигрывает, а коалиция T\{1} = {2; 3} не выигрывает. В коалиции T имеется t = 3 игрока, поэтому

$$\varphi_1=\frac{(t-1)!\ (n-t)!}{n!}=\frac{2!\cdot 1!}{4!}=\frac{1}{12}.$$

Далее определяем все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 2-го игрока: {2; 4}, {1; 2; 3}, {2; 3; 4}. Поэтому

$$\varphi_2=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

Аналогично получаем, что $\varphi_3=\frac{1}{4}$, $\varphi_4=\frac{5}{12}$.

В результате получаем, что вектор Шепли равен $\left(\frac{1}{12};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{5}{12}\right)$. При этом если считать, что вес голоса акционера пропорционален количеству имеющихся у него акций, то получим следующий вектор голосования: $\left(\frac{1}{10};\frac{2}{10};\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$, который, очевидно, отличается от вектора Шепли.

Анализ игры показывает, что компоненты 2-го и 3-го игроков равны, хотя третий игрок имеет больше акций. Это получается вследствие того, что возможности образования коалиций у 2-го и 3-го игрока одинаковые. Для 1-го и 4-го игрока ситуация естественная, отвечающая силе их капитала.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение кооперативной игры.
2. Какие виды кооперативных игр вы знаете?
3. В чем заключается основная идея решения таких игр?

Подписано в печать 27.01.2016
Заказ № 2
Формат 60 x 84 1/16
Бумага офисная.
Печать офсетная.
Объем 4,125 усл. п. л.
Тираж 100 экз.

Отпечатано
в ТОО «New Line Media»
г. Костанай, пр. Аль-Фараби, 115, оф. 512
тел.: 8 (7142) 53-11-47, 53-06-71
nlmedia.kz, geosprint@mail.ru